

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. В. КОВАЛЕНКО

ГИДРОМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕЧНОГО СТОКА С ЭЛЕМЕНТАМИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

*Утверждено ученым советом института
в качестве учебного пособия*

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД

1986

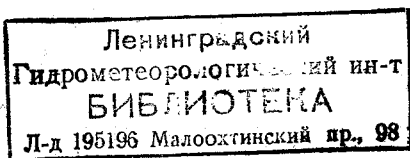
Коваленко В. В. Гидрометрическое оценивание речного стока с элементами стохастического подхода. Учебное пособие. — Л., изд. ЛПИ, 1986, с. 61. (ЛГМИ).

Учебное пособие написано на основе лекций, читаемых на факультете повышения квалификации Ленинградского гидрометеорологического института, и содержит необходимые гидрологам сведения о новых методах, применяемых в гидрометрическом учете речного стока.

Учебное пособие предназначено для специалистов, работающих в учреждениях Государственного комитета по гидрометеорологии и контролю природной среды, а также студентов-гидрологов старших курсов.

Табл. 1. Илл. 25. Библ. 11.

Рецензенты: Ленинградский Гидрометцентр; *И. Ф. Карасев*, д-р техн. наук (Государственный гидрологический институт).



ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная задача, стоящая перед спецкурсом, для которого написано учебное пособие, заключается в ознакомлении слушателей с современными методами гидрометрии, опирающимися на математические дисциплины, гидравлику и гидрологию.

Общая гидрометрия, изучаемая в ВУЗах, ограничивается рассмотрением основных вопросов организации гидрологических наблюдений и гидрометрического учета речного стока без подробного математического и гидравлического обоснования. Частично восполнить данный пробел и должен специальный курс, читаемый на факультете повышения квалификации, когда у слушателей имеется достаточный объем знаний, чтобы заняться вопросами обоснования методов гидрометрии.

Ограниченное количество учебного времени не позволяет подробно осветить современные методы гидрометрического учета стока. Поэтому упор сделан на наиболее важном аспекте: стохастическом оценивании стока. В отличие от традиционных способов речной гидрометрии (измерительных и расчетных) в данном случае имеется в виду определение не детерминированных значений изучаемых гидрологических характеристик (в основном расхода воды), а — динамики их функций плотности вероятности. Конечно, это пока первые шаги, требующие различных ограничений и допущений, но направлены они на сближение гидрометрии с гидрологией, где повсеместно используются статистические оценки расчетных параметров.

При написании формул и определений ссылки на соответствующие источники не делались. Перечень основной использованной литературы указан в конце учебного пособия общим списком.

ВВЕДЕНИЕ

Элементы функционального анализа, используемые в теории измерений

Трудно возразить против крылатого выражения «математика — царица всех наук». Любая прикладная дисциплина опирается на те или иные ее разделы. Например, гидрологические расчеты — на теорию вероятностей и математическую статистику, речная гид-

равлика — на дифференциальные уравнения в частных производных и т. д. Для теории измерений естественным математическим аппаратом является функциональный анализ.

Перевод измерительно-расчетных задач в термины функционального анализа — объективная необходимость. Роль гидролога при этом заключается в участии в математической постановке задачи и гидравлической и гидрометрической интерпретации полученного результата. Сам же процесс решения отдается на «откуп» математике. Остановимся только на основных положениях.

Понятие множества вводится аксиоматически, как совокупность каких-либо элементов (чисел, функций и т. п.), обладающих общим признаком (свойством). Например, множество функций $a(t)$, не превосходящих по модулю некоторой константы C , обозначается так

$$A = \{a(t) : |a(t)| < C\}.$$

Принадлежность элемента множеству указывается следующим образом: $a \in A$. Гидрологическим примером множества может служить совокупность гидрографов стока для фиксированного гидроствора. Элементами этого множества выступают функции $Q(t)$ ($t \in [0, T]$), где T — продолжительность гидрологического года. Если элементы множества сами являются множествами, то говорят о системе множеств.

Множество A называется ограниченным снизу, если существует конечное число M (точная нижняя грань множества), такое, что для всех элементов $a \in A$ имеет место неравенство $a \geq M$ (обозначение: $M = \inf_{a \in A} A$, символ $\inf$ читается инфимум).

Аналогично определяется верхняя грань $N = \sup_{a \in A} A$ (супремум).

Примером ограниченного сверху и снизу множества является последовательность $\{1/n\}$, $n=1, 2, 3, \dots$. Здесь $N=1$ и $M=0$.

Понятие меры $\mu(A)$ множества A обобщает понятие длины отрезка $\mu([a, b]) = b - a$, площади фигуры и т. д. Оно имеет непосредственное отношение к измеримости множеств, которая представляет основной интерес с точки зрения интегрирования. Например, в случае $\mu(A)=1$ мера называется вероятностной, а математическое ожидание случайной величины ξ определяется как интеграл по мере

$$\langle \xi \rangle = \int_A \xi(a) \mu(da),$$

где $a \in A$ — пространство случайных событий. Интуитивно понятие меры соответствует массе множества при некотором распределении ее по пространству. В частности, если непрерывная случайная величина X принимает значения в пределах интервала $[X_1, X_2]$ с одной и той же плотностью вероятности (равномерное распределение «массы» по пространству), т. е. имеет место закон

$p(x) = 1/(X_2 - X_1) = \text{const}$ при $X_1 < x < X_2$ и $p(x) = 0$ при $x < X_1$ и $x > X_2$, математическое ожидание определяется так:

$$\langle X \rangle = \int_{X_1}^{X_2} x \frac{1}{X_2 - X_1} dx = \frac{X_2 + X_1}{2}.$$

Если элементами множества являются функции и для их последовательности введено понятие предела, то имеем функциональное пространство. В таком пространстве встает задача сравнения элементов (т. е. функций) между собой. При рассмотрении множества действительных чисел мерой близости его элементов служит величина модуля разности $|a_1 - a_2|$. Для количественной оценки степени близости элементов любой природы (в нашем случае речь идет о функциях) вводится число, удовлетворяющее некоторым аксиомам, обозначаемое $\rho_A(a_1, a_2)$ и называемое расстоянием между $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$. Способ задания ρ_A называется метрикой, а пространство с метрикой — метрическим.

Рассмотрим примеры наиболее часто используемых в теории измерений метрических пространств:

1) числовое (евклидово) n -мерное пространство с метрикой

$$\rho_E(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^2 \right)^{0,5},$$

где n — натуральное число; a_i, b_i — проекции векторов a и b на i -ю координатную ось. На рис. В.1, а показано расстояние между элементами из двумерного пространства E^2 . Оно равно длине (модулю) вектора ab ;

2) пространство $C[0, 1]$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с метрикой

$$\rho_C(a(t), b(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t) - b(t)|.$$

На рис. В.1, б показано расстояние, задаваемое подобной метрикой. Из него видно, что оно равно максимальному отклонению функций друг от друга на интервале их определения.

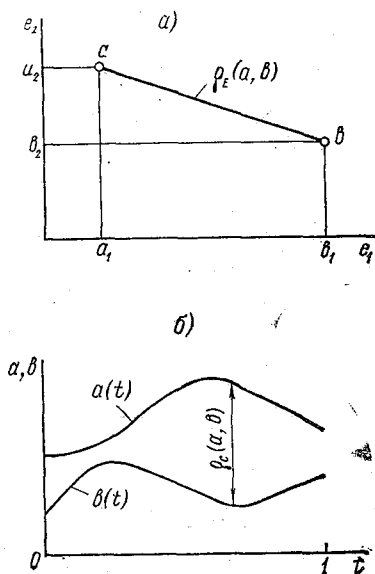


Рис. В.1. Расстояние между векторами a и b в пространстве E^2 (а) и между функциями $a(t)$ и $b(t)$ в пространстве $C[0, 1]$ (б).

3) пространство $L_2 [0, 1]$ функций, интегрируемых с квадратом. Расстояние в нем задается следующим образом:

$$\rho_{L_2}(a, b) = \left(\int_0^1 (a(t) - b(t))^2 dt \right)^{0.5}.$$

В L_2 входят функции $a(t)$, для которых величина $\int_0^1 a^2(t) dt$ ограниченная (непрерывные функции и функции, имеющие разрывы первого рода).

4) вероятностное пространство, обозначаемое обычно (Ω, A, P) , где $\Omega = \{\omega\}$ — пространство элементарных событий; A — так называемая σ -алгебра (сигма-алгебра) подмножеств Ω : система множеств, замкнутая по отношению к взятию суммы и пересечению счетного числа множеств; P — вероятность на A . Метрику этого пространства можно ввести с помощью среднего квадратического отклонения σ по формуле $\rho_{P_2}(X, Y) = \sigma(X - Y)$. Элементы этого пространства (обозначаемого P_2) X и Y отождествляются, если $\sigma(X - Y) = 0$, т. е. если с вероятностью единица, случайные величины X и Y совпадают.

Сам элемент функционального пространства количественно характеризуется нормой — расстоянием от данного элемента до нулевого. Например, для пространства C норма элемента определяется выражением

$$\|a\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)|.$$

Для пространства P_2 норма элемента будет $\|X\|_{P_2} = \sigma(X)$. Пусть, например, в гидрометрическом створе производится ряд измерений расхода воды какими-либо способами с погрешностью $\delta = Q_{\text{изм}} - Q_{\text{ист}}$ (здесь $Q_{\text{изм}}$, $Q_{\text{ист}}$ — соответственно измеренное и истинное, т. е. точное, значения расхода). Погрешность δ будет меняться от одного измерения i к другому $i+1$, как показано на рис. В.2. Для однозначной оценки качества измерений расхода двумя конкурирующими способами можно выбрать, например, максимальное значение погрешности $\delta_{\text{макс}}$ в ряду из n измерений. Это будет равносильно использованию предельной погрешности, имеющей смысл такой нормы:

$$\|\delta\|_C = \max_i |\delta_i|, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

В практике технических измерений, однако, пользуются другой оценкой погрешности, а именно среднеквадратическим отклонением

$$\sigma(Q) = \|\delta\|_{P_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}{n}},$$

где Q_i — значение расхода воды, полученное при i -ом измерении; $\bar{Q}$ — истинное значение расхода (точнее, среднее из всех измеренных значений).

Преимущество оценки качества способа (или устройства) измерения величиной $\|\delta\|_{p_2}$, по сравнению с $\|\delta\|_C$ заключается в том, что она является более объективной оценкой, ибо характеризует процесс измерения в целом, по совокупности всех (и «удачных» и «неудачных») попыток, а не только по одному (максимальному)

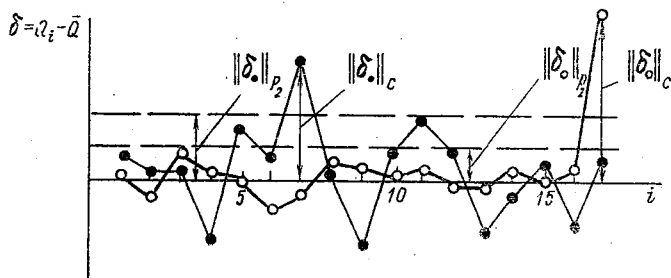


Рис. В.2. Пример использования понятия нормы для характеристики погрешности: ●, ○ — первый и второй способы измерений соответственно.

значению погрешности. Рис. В.2 иллюстрирует сказанное. Из него видно, что если оценивать качество измерений нормой $\|\delta\|_C$, то имеем $\|\delta_0\|_C > \|\delta_0\|_{p_2}$, т. е. второй способ (○) оказывается хуже первого (●), хотя погрешность измерения оказалась значительной только один раз при 17-ом измерении расхода. Но эта погрешность могла произойти и не за счет того, что способ измерения расхода «плохой», а по чисто случайным причинам (например, грубая описка). В то же самое время $\|\delta_0\|_{p_2} > \|\delta_0\|_{p_2}$, т. е. по совокупному вкладу результатов всех 17 измерительных опытов второй способ оказывается предпочтительнее первого. Какую именно норму выбрать для оценки погрешности зависит в общем случае от конкретных условий производства измерений и целевого назначения измерительного способа или устройства. Например, если производятся массовые измерения, то предпочтительна средне-квадратическая оценка; если же речь идет об одном уникальном эксперименте, то необходим такой способ измерений, который заведомо не даст «случайно» значительную погрешность.

Как видно из приведенных примеров, смысл введения метрики (и нормы) состоит в том, что задача сравнения функций сводится к задаче сравнения чисел.

Рассмотрим еще одно важное понятие функционального анализа. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X на множество Y (записывается $F: X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$). В зависимости от природы элементов, образующих множества X и Y , отображения делятся на функции, функционалы и операторы. Когда X и Y — числовые множества, то отображение f — это обычная функция $y=f(x)$ (например, $Q=f(H)$, где H — уровень воды).

Функционал осуществляет отображение функционального множества на числовое. Например, при задании нормы элемента пространства $C[0, 1]$ по формуле

$$\|a\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)|$$

имеем дело с функционалом, ибо с помощью этого выражения функции $a(t)$, заданной на интервале $[0, 1]$, сопоставляется число $\|a\|_{C[0,1]}$, а именно максимальное ее значение на $[0, 1]$. Выражение

$$y = \int_0^{10} x^2(t) dt$$

также является примером функционала, так как функции $x(t)$ ставится в соответствие число: значение определенного интеграла.

Оператор осуществляет отображение одного функционального множества X на другое — Y . Простейшим примером служит математическая операция дифференцирования

$$y(t) = \frac{d}{dt} [x(t)], \quad x \in X, y \in Y.$$

В данном случае функция $x(t)$ сопоставляется с другой функцией $y(t)$ — ее производной.

Приведем гидрометрические примеры отображений. Измерительное устройство с точки зрения функционального анализа осуществляет отображение одного множества в другое. Например, приборы, производящие статические измерения скалярной величины, отображают числовое множество в «себя». В частности, обычный ртутный термометр отображает множество температур в множество перемещений ртути, т. е. осуществляет функциональное преобразование. Гидрометрическая вертушка описывается функционалом, ибо в турбулентном речном потоке измерения производятся в соответствии с формулой

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

где $\bar{u}$ — средняя за интервал измерения скорость в точке на скоростной вертикали (обычно $T \approx 100$ с); $u(t)$ — мгновенное значение скорости пульсирующего потока.

Самописец уровня воды, отображающий изменение уровня воды в изменение положения пера на ленте самописца, описывается оператором.

Таким образом, изложенное показывает, что, опираясь на понятия множество и отображение, можно формализовать постановку измерительных задач, абстрагируясь от их конкретного (гидрологического) содержания. Разумеется, это не означает, что математика заменяет гидрологию. Она просто приходит последней на помощь, ибо, поставив гидрометрическую задачу в терминах функционального анализа, гидролог тем самым может воспользоваться для ее решения мощным и хорошо развитым математическим аппаратом.

Основная трудность в такой ситуации заключается в правильной математической постановке задачи и интерпретации полученного решения.

1. ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ПУНКТОВ И СРОКОВ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

1.1. Постановка задачи гидрологических измерений

Постановку задачи измерения в самом простом случае формально можно изложить так: имеется скалярная физическая величина $\tilde{a}$ (например, масса тела, сопротивление резистора и т. п.), значение которой неизвестно, а также величина того же рода, которая может принимать контролируемые значения внутри диапазона $A (a \in A, \tilde{a} \in A)$. Необходимо, сравнивая $\tilde{a}$ с a (варьируя a), выбрать такое значение $a = a^*$, чтобы $a^* = \tilde{a}$. Если речь идет об определении массы тела $\tilde{a}$ с помощью весов, то, обозначив значение изменяемой меры (гири) через a_i и сравнивая $\tilde{a}$ с a_i при помощи правила сравнения (метрики) ρ_C , необходимо добиться, чтобы

$$\rho_C(\tilde{a}, a_i) = 0, \text{ т. е. } a_i = \tilde{a} \quad (\max_i |a_i - \tilde{a}| = 0).$$

В более общем случае измерение рассматривается как познавательный процесс, в результате которого необходимо получить описание исследуемого объекта ($\tilde{a}$) в количественных терминах, т. е. — модель объекта (a^*) или связанные с ней отдельные характеристики. Качество выбранной модели можно охарактеризовать ее информативностью.

Введем понятие информации. Пусть производится какой-либо опыт и имеется N возможных его исходов. Количество информации при i -ом исходе J_i пропорционально величине, обратной его вероятности

$$J_i \sim \frac{1}{P_i}.$$

С практической точки зрения удобным оказалось пользоваться логарифмами и определять информацию i -го исхода следующим образом:

$$J_i = \log \frac{1}{P_i} = -\log P_i.$$

Основание логарифма может быть любым. В случае, если оно равно двум, количество информации измеряется в битах.

Если i -й исход опыта повторяется n_i раз, то средняя информация, доставляемая опытом, будет

$$J_{\text{ср}} = \frac{n_1 J_1 + \dots + n_k J_k}{N}.$$

Так как вероятность определяется отношением числа повторений исходов к числу всевозможных исходов опыта, т. е.

$$P_i = \frac{n_i}{N},$$

то имеем

$$\begin{aligned} J_{\text{ср}} &= \frac{n_1}{N} J_1 + \dots + \frac{n_k}{N} J_k = P_1 J_1 + \dots + P_k J_k = \\ &= \sum_{i=1}^k P_i \log \frac{1}{P_i} = - \sum_{i=1}^k P_i \log P_i. \end{aligned}$$

Этим выражением определяется энтропия $H = J_{\text{ср}}$, которая характеризует неопределенность исследуемой ситуации. Действительно, если обратиться к формуле $J_i = -\log P_i$, то видно, что, чем больше вероятность i -го исхода, тем меньше энтропия, т. е. чем более определенная ситуация до измерения, тем меньше новой информации получаем в результате измерительного эксперимента.

Таким образом, количество информации есть уменьшение энтропии вследствие опыта или другого акта познания и определяется выражением

$$J = H_1 - H_2,$$

где H_1 — начальная энтропия (до опыта); H_2 — конечная энтропия (после опыта).

Общую схему передачи информации поясняет рис. 1.1, а. Источник информации (объект) характеризуется начальной энтропией H_1 . В результате измерения энтропия уменьшается до значения H_2 и в канал связи между источником и приемником (субъектом) поступает количество информации $J_a = H_1 - H_2$. В канале связи шумы искажают информацию об объекте, а к субъекту поступает некоторая ее часть J_z . Однако реально для субъекта в качестве

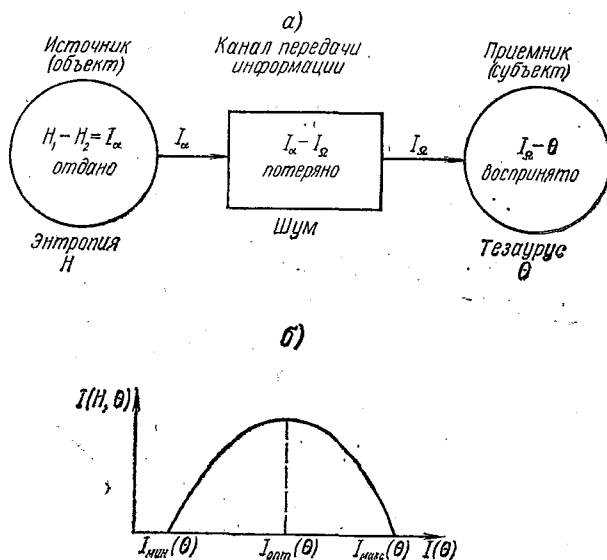


Рис. 1.1. Общая схема (а) и процесс (б) передачи информации.

новой информации выступает только та часть J_z , которая дополняет уже имеющиеся у него сведения об объекте θ (тезаурус — запас знаний, используемый приемником информации). При этом возможны две крайние ситуации:

а) $\theta = J_z$ — никакой новой информации субъект получать не будет;

б) $\theta = 0$ — информация субъектом не будет восприниматься вследствие того, что он ее не понимает вообще.

На рис. 1.1, б наглядно изображен процесс передачи информации. На этом рисунке $J(H, \theta)$ — количество информации, которое оценивает изменение тезауруса θ под действием сообщения H ; $J_{\min}(\theta)$ — минимальное количество априорной информации тезауруса θ у приемника, при котором субъект начинает понимать сообщения, поступающие от источника; $J_{\text{опт}}(\theta)$ — оптимальное количество информации тезауруса θ , при котором достигается

максимум восприятия; $J_{\text{макс}}(\theta)$ — максимальное количество информации тезауруса, при которой восприятие информации прекращается, так как субъект оказывается насыщенным знаниями в пределах возможностей объекта. Спад кривой обусловлен тем, что априорные знания становятся настолько богатыми, что источник не приносит новой информации.

В общем виде постановка задачи гидрологических измерений сводится к следующему. Речной бассейн (или любой водохозяйственный комплекс) рассматривается как некая система, подверженная неуправляемому (пока во всяком случае) входному воздействию в виде осадков и допускающая активное вмешательство в ее поведение (регулирование, переброска стока и т. д.). Для оперативного управления подобной системой необходимо знание вектора $\vec{W}(x, t)$, компонентами которого являются водный W , твердый $W_{\text{ТВ}}$, тепловой $W_{\text{Т}}$ и другие запасы на любой момент времени t в любой точке x системы. В общем случае изменение вектора $\vec{W}(x, t)$ определяется дифференциалом

$$d\vec{W}(x, t) = \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dt.$$

Первое слагаемое учитывает изменение соответствующих компонент $\vec{W}$ (осадки, испарение, инфильтрация, сброс загрязнений в реки, водозабор, взаимодействие поверхностных и подземных вод и т. п.) по объему, занимаемому системой. Второе — характеризует динамические изменения, т. е. расход запасов, имеющих в бассейне.

Ограничимся рассмотрением изменений, происходящих только в русловой сети по двум причинам: во-первых, наиболее важные динамические процессы, связанные с задачей управления, происходят именно в русле, во-вторых, для потоков в руслах имеются более или менее обоснованные математические модели, в отличие, например, от процессов, связанных с инфильтрацией и взаимодействием речных и грунтовых вод, а тем более — с их химическим или тепловым взаимодействием. В этом случае запас $\vec{W}$ является функцией измеримого подмножества (x, t) , представляющего направленный граф речной системы

$$\vec{W}(A) = \int_A (d\vec{W}/d\mu) d\mu(A),$$

где $\mu(A)$ — мера графа.

Обратим внимание на диалектическое единство единичного, особенного и общего, обеспечиваемое гидрометрическим, гидравлическим и гидрологическим подходами к определению $\vec{W}$. Задачей этих трех дисциплин является определение вектора $\vec{W}$ (или

различных функционалов от него). Однако делается это с помощью различных операторов, отображающих множество известных элементов (получаемых различно в указанных дисциплинах) в множество градиентов $d\vec{W}/d\mu$. В гидрометрии основной упор делается на непосредственное измерение. Гидравлика использует расчет по математическим моделям, построенным на априори известных общих законах механики. В гидрологии опираются на научно-методические основы гидрологического районирования с целью распространения характеристик режима на неизученные объекты по методу аналогий.

Проблема оценивания гидрологического режима состоит из двух задач: 1) выбор пространственно-временных узлов наблюдения; 2) выбор тезауруса (набора измерительных или расчетных моделей) для оценки $d\vec{W}/d\mu$ в закрепленных узлах. Таким образом, речь может идти только о приближенном вычислении запаса $\vec{W}$ путем минимизации погрешности

$$\rho \left(\left(\frac{d\vec{W}}{d\mu} \right)_{\text{изм}}, \mu_{i,k} \right) = \int_A \frac{d\vec{W}}{d\mu} d\mu - \sum_{i,k=1}^{m,n} \left(\frac{d\vec{W}}{d\mu} \right)_{\text{изм}} \mu_{i,k}$$

(здесь $\mu(A) = \sum_{x_p, t_k \in A} \mu_{i,k}$), чего можно добиться варьируя узлы i, k и способы измерений (расчетов) $(d\vec{W}/d\mu)_{\text{изм}}$ в этих узлах при различных ограничениях (например, экономического или коммуникационного характера).

Изложим все это более «простым» языком. Изменение запасов воды на участке русла можно представить в виде

$$\begin{aligned} dW(x, t) &= \frac{dW(x, t)}{\partial x} dx + \frac{dW(x, t)}{\partial t} dt = \\ &= F(x, t)dx + Q(x, t)dt, \end{aligned}$$

где $F(x, t)$ — площадь живого сечения; $Q(x, t)$ — расход воды. Для величины запаса воды имеем

$$W[Q(x, t), F(x, t)] = \int_0^x F(x, t)dx + \int_0^T Q(x, t)dt.$$

При определении W необходимо измерять расход $Q(x, t)$ и площадь живого сечения $F(x, t)$. Ясно, во-первых, что производить измерения в каждой точке вдоль русла по координате x и в каждый момент времени t невозможно. Во-вторых, точные значения расхода и площади, которые входят в выражение для W , также не известны. В основе их определения лежат те или иные измерительные модели (например, расход воды в русле определяется на основе модели «скорость — площадь»). Следовательно, реально

получаем вместо точного значения W приближенную оценку в соответствии с выражением

$$\int_0^x F(x, t) dx + \int_0^T Q(x, t) dt \approx \sum_{i=1}^n F_{\text{изм}}(x_i, t_k) \Delta x_i + \sum_{k=1}^m Q_{\text{изм}}(x_i, t_k) \Delta t_k,$$

где $F_{\text{изм}}$ — измерительная модель площади живого сечения (т. е. получающийся при дискретных промерах многоугольник, аппроксимирующий реальную форму сечения); $Q_{\text{изм}}$ — измерительная модель расхода, например модель «скорость — площадь»:

$$Q_{\text{изм}} = kv_1 F_1 + \frac{v_1 + v_2}{2} F_2 + \dots + \frac{v_{n-1} + v_n}{2} F_{n-1} + kv_n F_n$$

(здесь k — береговой коэффициент) или формула Шези $Q_{\text{изм}} = V I R C F$ (здесь I — уклон водной поверхности, C — коэффициент Шези, R — гидравлической радиус; i, k — номера точек, в которых производят измерения по длине (рис. 1.2, а) и по времени (рис. 1.2, б) соответственно).

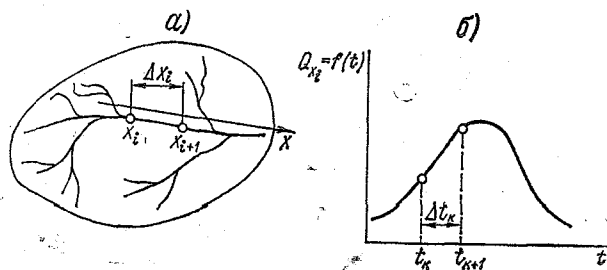


Рис. 1.2. Дискретные измерения по продольной координате (длине) (а) и по времени (б)

Погрешность определения W будет

$$\rho[Q_{\text{изм}}(x_i, t_k), F_{\text{изм}}(x_i, t_k)] = \int_0^x F(x, t) dx + \int_0^T Q(x, t) dt - \sum_{i=1}^n F_{\text{изм}}(x_i, t_k) \Delta x_i - \sum_{k=1}^m Q_{\text{изм}}(x_i, t_k) \Delta t_k.$$

Оценим отклонение ρ от нуля той или иной нормой $\|\rho\|$ (например, в смысле пространства L_2). Тогда задача измерений будет состоять в минимизации $\|\rho\|$.

Таким образом, реальная задача измерений распадается на две задачи:

1) выбрать из имеющегося тезауруса гидрометрии такие способы измерений $Q_{\text{изм}}$ и $F_{\text{изм}}$, чтобы при их реализации определение запасов воды в бассейне было наиболее точным;

2) так расположить пункты наблюдений (т. е. выбрать координаты x_i) и назначить сроки измерений t_k , чтобы обеспечить наиболее точное определение запасов воды.

Следовательно, задача измерений в терминах математики является задачей вариационного исчисления на условный экстремум, так как необходимо иметь в виду довольно жесткие ограничения экономического характера на общее число гидрологических постов и частоту измерений на них.

1.2. Применение теории случайных процессов (полей) для оптимизации режимной гидрологической сети

Сформулированная в п. 1.1 задача гидрологических измерений еще далека от своего полного решения, но имеются частные подходы к решению, которые рассматриваются ниже.

Гидрологические посты предназначены для изучения режима вод суши и информирования о состоянии гидрологических объектов. Существует два их основных типа:

а) режимные — обеспечивают изучение зональных закономерностей гидрологического режима — годового стока рек и элементов водного баланса речных бассейнов, стока растворенных и взвешенных веществ, а также уровней уклонов и гидравлических параметров, непосредственно характеризующих водные объекты;

б) оперативные — служат для текущего контроля состояния водных объектов при решении задач, связанных с прогнозом, увязкой стока, составления оперативных балансов и планов использования вод в зоне водохранилищ и гидроузлов.

Обоснование принципов рационального размещения сети заключается в определении такой густоты пунктов наблюдений, которая была бы достаточной для получения достоверных и репрезентативных гидрологических характеристик и в то же время не требовала бы неоправданных затрат материальных ресурсов на открытие новых постов.

Общее представление о динамике роста числа постов дает график, представленный на рис. 1.3. Сложившаяся ситуация, показанная на этом рисунке, отражает в первую очередь общее промышленное развитие территорий представленных стран. Обращает на себя внимание тот факт, что США, имеющие почти

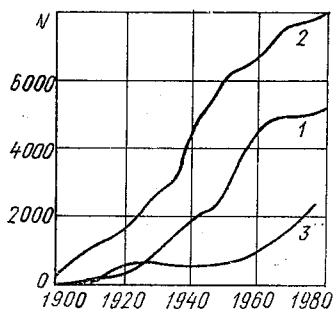


Рис. 1.3. Рост числа N стоковых постов:

1 — СССР; 2 — США; 3 — Канада.

в 2,5 раза меньшую территорию, чем СССР, значительно превосходят СССР по численности постов. Заметим, что по состоянию на 1 января 1980 г. численность сети СССР — 7083 поста, в том числе 5478 стоковых; при этом на один пост на ЕТС приходится 2150 км², а, например, в Якутии — 18 тыс. км². Однозначный ответ о необходимой плотности гидрологической сети могут дать только обоснованные научными данными критерии, к получению которых переходим.

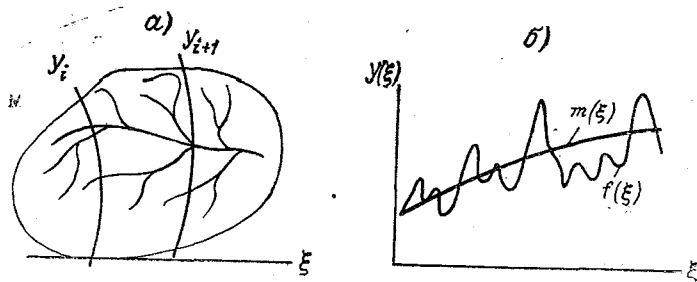


Рис. 1.4. Речной бассейн (а) и представление речного стока в виде двух составляющих (б).

Основное назначение режимных постов — наблюдение за стоком рек, характеризуемого величиной годового стока Y и его нормой Y_0 в л/с с 1 км² площади водосбора. Рассмотрим следующую функцию «поля» речного стока:

$$Y = f(\xi, C_v, \text{grad } Y, r(l), \sigma),$$

где ξ — ось в направлении градиента стока (см. рис. 1.4, а); $\text{grad } Y$ — градиент стока; C_v — коэффициент вариации годового стока; $r(l)$ — нормированная корреляционная функция годового стока (l — расстояние между центрами водосборов); σ — относительная случайная погрешность определения годового стока по гидрометрическим данным.

Годовой сток можно рассматривать как пространственную реализацию случайной функции с конечным математическим ожиданием, на которое наложены случайные отклонения:

$$Y(\xi) = m(\xi) + f(\xi),$$

где $m(\xi)$ — неслучайная функция математического ожидания (нормы) стока; $f(\xi)$ — случайная функция, характеризующая несинхронность изменений стока для различных рек за одни и те же годы (рис. 1.4, б).

В соответствии с таким представлением стока возникают два критерия размещения сети (по числу слагаемых).

Градиентный критерий. Приращение нормы стока $\Delta Y(\xi)$ по координате ξ будет

$$\Delta Y(\xi) = \frac{dm(\xi)}{d\xi} \Delta \xi = \text{grad} Y \cdot \Delta \xi.$$

Необходимо обеспечить условия, при которых изменение нормы стока на расстоянии $\Delta \xi = l$ между центрами бассейнов (т. е. величина $\Delta Y(l) = \text{grad} Y \cdot l$) превысило бы в два раза среднюю квадратическую погрешность $\sigma_{\Delta Y} = \sqrt{2} \sigma_0 Y_{\text{ср}}$ (здесь $\sigma_0 = C_0 / \sqrt{N}$ — погрешность определения нормы стока; N — число лет наблюдений; $Y_{\text{ср}}$ — средняя на участке радиуса l норма стока), определяемую по данным измерений на двух смежных опорных постах, т. е. должно выполняться неравенство

$$\text{grad} Y \cdot l \geq 2 \sigma_{\Delta Y} = 2 \sqrt{2} \sigma_0 Y_{\text{ср}}.$$

Поэтому расстояние между центрами бассейнов $l_{\text{град}}$, замыкаемыми опорными режимными постами, будет

$$l_{\text{град}} \geq \left| \frac{2,82 \sigma_0}{\text{grad} Y} \right| Y_{\text{ср}}.$$

Таким образом, минимальное расстояние между стоковыми постами определяется как физико-географическими условиями, задаваемыми параметрами $\text{grad} Y$, $Y_{\text{ср}}$ (поэтому, например, в горных районах, где велики градиенты стока, сеть постов должна быть гуще), так и уровнем развития гидрологической измерительной техники, от которого зависит величина σ_0 . Для того чтобы перейти от линейных размеров к площадным и определить тем самым расчетную площадь, приходящуюся на один стоковый пост, воспользуемся следующими эмпирическими соотношениями:

$$L = 2\sqrt{F}, \quad l = 0,5 L,$$

где L — длина реки; F — площадь бассейна; l — расстояние между центрами бассейнов.

С учетом этих зависимостей получаем окончательную расчетную формулу для градиентного критерия

$$F_{\text{град}} \geq \frac{8\sigma_0^2}{(\text{grad} Y)^2} Y_{\text{ср}}^2.$$

Значение $F_{\text{град}}$ дает минимально допустимую площадь, приходящуюся на стоковый пост. Располагать режимные посты чаще, чем требуется по этому критерию экономически нецелесообразно.

Корреляционный критерий. При расчетах стока широко используется метод гидрологической аналогии, когда изучение режима водного объекта, на котором не ведутся систематические наблю-

дения за стоком воды, проводится по реке-аналогу. Последнее возможно, если режимы обоих объектов взаимосвязаны, что имеет место для не слишком удаленных друг от друга речных бассейнов.

По мере роста водосборов смежных бассейнов связь характеристик стока, определяемая случайной составляющей $f(\xi)$, становится все более неоднозначной. Для рек с близко расположенными бассейнами имеет место положительная корреляция стока, и нормированная корреляционная функция имеет вид, показанный на рис. 1.5, где L_0 — радиус корреляции, т. е. расстояние, при котором функция $r(l)$ переходит через точку нулевого значения $L \approx 1600$ км).

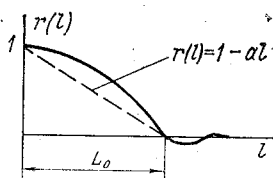


Рис. 1.5. Нормированная корреляционная функция

При интерполяции стока между пунктами измерений возникает погрешность $\sigma_{\text{ин}}$, зависящая от тесноты коррелятивных связей. Она достигает максимального значения при интерполяции на середину между пунктами наблюдения и определяется выражением

$$\sigma_{\text{ин}}^2 = 1,5 C_v^2 - 2 C_v^2 r \left(\frac{l}{2} \right) + 0,5 C_v^2 r(l) + 0,5 \sigma_0^2.$$

При аппроксимации корреляционной функции формулой

$$r(l) = 1 - al,$$

где $a = 1/L_0 = 0,000625$ 1/км, предыдущее выражение упрощается

$$\sigma_{\text{ин}}^2 = 0,5 (C_v^2 al + \sigma_0^2).$$

Полагая, что интерполяция производится с точностью, не большей, чем измерение стока (т. е. $\sigma_{\text{ин}} \approx \sigma_0$), получим критериальное соотношение

$$\sigma^2 \geq 0,5 (C_v^2 al + \sigma^2),$$

откуда определяется допустимое по условиям корреляции расстояние между центрами бассейнов

$$l_{\text{корр}} \leq \frac{\sigma^2}{a C_v^2},$$

а с учетом указанных выше эмпирических соотношений — и расчетная площадь водосбора

$$F_{\text{корр}} \leq \frac{\sigma^4}{a^2 C_v^4}.$$

Этот критерий дает верхнюю границу водосбора, контролируемого режимным постом.

Кроме двух рассмотренных критериев, обусловленных представлением функции $Y(\xi)$ в виде детерминированной и случайной составляющих, имеется еще один критерий, определяющий размещение сети постов.

Критерий репрезентативности. Речной сток обусловлен климатическими факторами и подчинен зональным закономерностям. В его изменении наблюдается широтная зональность и вертикальная поясность. Формирование непрерывно изменяющихся в пространстве характеристик стока связано с проявлением именно зональных закономерностей. Так как пространственная изменчивость стока имеет вероятностный характер, то его зональные значения выявляются лишь при отнесении их к водосборам определенных, предельно малых размеров $F_{\min}$. По мере уменьшения площади водосборного бассейна все большее значение приобретают локальные (азональные) факторы (глубина аэрозионного вреза русел и степень дренирования подземных вод, наличие карста и т. п.), которые создают вариации стока относительно зональных характеристик. Таким образом, появляется третий критерий оптимального размещения гидрологической сети — критерий репрезентативности. Площадь, приходящаяся на стоковый пост, не должна быть очень малой, иначе информация, получаемая с него, будет отражать не общие зональные закономерности стока, а местные особенности, т. е. не будет репрезентативной. Следовательно, несоблюдение этого критерия делает невозможным получение зональных характеристик стока. В результате имеющихся наблюдений на стоковых станциях определены предельно малые площади водосборов $F_{\min}$, с превышением которых зональная норма стока перестает зависеть от размеров бассейна. Так, например, по данным К. П. Воскресенского для лесной зоны азиатской территории СССР $F_{\min} \approx 500 \text{ км}^2$, а для степной — 1500 км^2 .

Таким образом, оптимальная площадь $F_{\text{опт}}$, которая приходится на один режимный пост, должна находиться в диапазоне

$$F_{\min} < F_{\text{град}} \leq F_{\text{опт}} \leq F_{\text{корр.}}$$

Общее количество режимных стоковых постов в речном бассейне площадью F может быть определено по формуле

$$N_{\text{опт}} = \frac{F}{F_{\text{опт}}}.$$

1.3. Применение информационной теории погрешностей для оптимизации измерений

Режимная сеть, оптимизация которой рассмотрена выше, не в состоянии обеспечить текущий контроль за состоянием водных объектов, так как предназначена для изучения зональных закономерностей гидрологического режима — годового стока рек и элементов водного баланса речных бассейнов. Для того чтобы управлять гидрологической системой уже нельзя ограничиться

знанием только режимных характеристик (например, нормы стока в замыкающем створе) — нужна информация о текущем состоянии изучаемого объекта. Это требует несколько других подходов

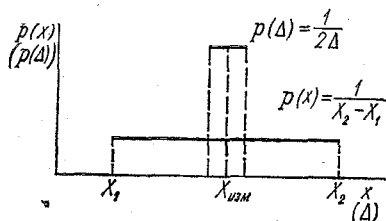


Рис. 1.6. Равномерное распределение измеряемой величины X и погрешности Δ .

к оптимизации пунктов наблюдений и сроков производства измерений. Оптимальное функционирование водохозяйственных систем по априорной информации, как правило, невозможно и необходимо получение апостериорных данных в результате экспериментального наблюдения. Последнее, очевидно, имеет смысл только, если оно уменьшает априорную энтропию, обусловленную общим фоном гидрологической изученности рассматриваемой

речной системы (последнее обеспечивается режимными постами).

Выше показано, что величина энтропии, характеризующая степень неопределенности ситуации, определяется формулой

$$H = - \sum_{i=1}^k P_i \log P_i.$$

Для непрерывных величин, с которыми имеет дело гидрология, эта зависимость естественным образом обобщается и принимает вид

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx,$$

где $p(x)$ — плотность вероятности величины x .

Количество информации, получаемое в результате измерения, определялось как разность энтропий до H_1 и после H_2 опыта

$$J = H_1 - H_2.$$

Рассмотрим смысл введенных понятий на примере равномерно распределенной величины X и равномерно распределенной погрешности Δ (рис. 1.6). На рисунке обозначено: $X_2 - X_1$ — диапазон значений измеряемой величины; $X_{изм}$ — измеренное значение величины X ; Δ — погрешность, с которой измерено $X_{изм}$.

В соответствии с приведенными формулами подсчитаем количество информации, которое получим в результате измерения:

$$\begin{aligned} J &= - \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{X_2 - X_1} \log \frac{1}{X_2 - X_1} dx + \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} \log \frac{1}{2\Delta} d\Delta = \\ &= \log(X_2 - X_1) - \log 2\Delta. \end{aligned}$$

Рассмотрим, хотя и не совсем корректный, но очень наглядный пример. Пусть определяется некоторая сумма денег, например $X=10\,000$ руб, с погрешностью до 1 коп. В соответствии с приведенными формулами, имеем

$$J=H(X) - H(\Delta) = \lg(X_2 - X_1) - \lg \Delta = \\ = \lg 1\,000\,000 - \lg 1 = 6 \text{ [дит]}.$$

Если погрешность определения указанной суммы денег 10 руб., то получим

$$J = \lg 1\,000\,000 - \lg 1000 = 3 \text{ [дит]}.$$

Единицы энтропии и количества информации одни и те же, но численное их значение зависит от основания используемых логарифмов: 1 дит (основание 10) = 2,3 нит (основание e) = 3,3 бит (основание 2).

Перейдем теперь непосредственно к вопросу оптимизации. В гидрографической сети речного бассейна пункты наблюдения за расходом воды должны быть расположены: во-первых, в местах впадения притоков, пропускающих определенный объем стока, формирующегося на водосборном бассейне и превышающего заданную погрешность определения запасов $W(x, t)$ (обозначим их число N_1), во-вторых, на транзитных участках рек (N_2).

Значение N_1 можно определить на основе известных из гидрографии законов Хортона:

$$n = 2,2 \lg Q_n + 6,35, \\ S_k = \sigma_0^{n-k-1} (\sigma_0 - 1),$$

где n — порядок речной системы; Q_n — средний многолетний расход; σ_0 — бифуркационное отношение; S_k — количество притоков в речной системе порядка k (пример расчета приводится ниже).

На транзитных участках, т. е. на участках от одной до другой точки слияния рек, расход изменяется, как правило, незначительно, во всяком случае слабо нелинейно по длине реки. Поэтому достаточно ограничиться двумя постами на каждом учитываемом притоке. Если за один из них считать пост в узловой точке (точке слияния притоков), который уже учитывается в N_1 , то можно допустить в первом приближении, что общее число гидрологических постов равно примерно $2 N_1$.

На каждом посту необходимо производить измерения расхода. Частоту последних можно оценить, опираясь на теорему В. А. Котельникова, которая устанавливает возможность полностью описать исследуемый процесс (в данном случае гидрограф стока), пользуясь конечным числом его отсчетов. Измерения, проведенные сверх указанного количества, новой информации не добавляют. Из курса математики известно, что функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде триго-

нометрического ряда при помощи функций $\sin n \omega_0 t$ и $\cos n \omega_0 t$ (здесь n — целые числа, $\omega_0 = 2\pi/T$, а T — период $f(t)$):

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=m} a_n \cos n \omega_0 t + \sum_{n=1}^{n=m} b_n \sin n \omega_0 t,$$

где число учитываемых гармоник спектра m зависит от требуемой точности восстановления функции $f(t)$ по дискретным ее отсчетам. Знание амплитуд a_n и b_n и постоянной составляющей $a_0/2$, т. е. $2m+1$ величин, достаточно для полного определения $f(t)$. Другими словами, имея $2m+1$ отсчетов функции $f(t)$, получаем систему $2m+1$ уравнений с $2m+1$ неизвестными, которые могут быть найдены путем решения этой системы.

Написанный ряд ограничивается наивысшей гармоникой, частота которой $f_{\text{макс}} = 1/T_{\text{мин}}$, где $T_{\text{мин}}$ — период наивысшей гармоники. Число гармоник m получается путем деления $f_{\text{макс}}$ на частоту первой гармоники $m = f_{\text{макс}}/f_1 = f_{\text{макс}} T_1$. Согласно теореме, необходим $2m+1$ отсчет. Разделив интервал T_1 на $2m$ равных частей ($2m \approx 2m+1$ при достаточно большом m) $\Delta t = T_1/2m$, найдем промежуток времени для производства отсчетов

$$\Delta t = \frac{1}{2 f_{\text{макс}}}.$$

Пользуясь этой формулой, А. М. Димаксян определил необходимое количество измерений во времени для различных типов гидрографов (по классификации Б. Д. Зайкова). Требуемые интервалы дискретизации при 5%-ной погрешности вычисления стока приведены в таблице.

Интервалы дискретизации гидрографов стока

Тип гидрографа	Интервал дискретизации в сутках
Казахстанский	2,88
Восточноевропейский	11,5
Западносибирский	3,0
Восточносибирский	2,88
Алтайский	1,5
Дальневосточный	3,0
Тяньшанский	1,25
Причерноморский	0,75
Крымский	1,5
Северокавказский	0,6

Примечание: приведенные в таблице данные носят иллюстративный характер. Для строгих расчетов надо некоторые типы гидрографов подразделять на отдельные участки.

Общее количество пространственно-временных узлов измерений равняется произведению числа гидрологических постов в бассейне на число измерений за интересующий период.

Следует заметить, что фактически существующее положение дел на гидрологической сети таково, что за редким исключением расход измеряют не более 52 раз в год, в то время как методика, основанная на теореме Котельникова, для некоторых типов гидрографов (например, причерноморского) дает несколько сотен точек отсчета. В связи с этим следует обратить внимание на следующие моменты.

1. Для того чтобы с заданной погрешностью восстановить ход гидрографа нужно определенное количество отсчетов, которое диктуется упомянутой теоремой.

2. Если на створе есть жесткая связь расхода с уровнем, то разумно часть отсчетов заменить отсчетами более доступного и «дешевого» уровня. Так фактически на гидрологической сети и поступают.

Рассмотрим пример расчета по данной методике. Пусть требуется определить экономические затраты на оптимизацию бассейна реки Или. Преобладающим типом гидрографа для нее является тяншанский. Поэтому в соответствии с теоремой отсчетов для 5%-ной погрешности восстановления гидрографов на постах бассейна данной реки требуется 292 отсчета за год.

Общее число постов, соответствующее учитываемым дугам графа бассейна реки Или, примем исходя из того, что в рассмотрение вводятся только посты, устанавливаемые на притоках, пропускающих, например, 5% от нормы стока в замыкающем створе, и постов, устанавливаемых на транзитных участках. В первом приближении последнее можно опустить, так как первую часть постов можно, исходя из балансовых соображений, использовать для определения нарастания расхода по длине притоков (если, конечно, такое нарастание близко к линейному, а так обычно и бывает). Зная из картографического материала площадь бассейна реки Или $F=129$ тыс. км² и норму стока 3,65 л/с с 1 км², находим расход в замыкающем створе $Q=3,65 \times 129=471$ [м³/с]. В соответствии с законом Хортонa $n=2,2 \lg Q+6,35$. Этому значению расхода соответствует 12-й порядок речной системы, т. е. $n=2,2 \lg 471+6,35 \approx 12$. Необходимо в рассмотрение включить притоки, пропускающие 5% от 471 м³/с, что в соответствии с тем же законом дает $k=9$, т. е. наименьший порядок притоков, на которых имеет смысл оборудовать посты, равняется девяти. Таким образом, в соответствии со вторым законом Хортонa $S_k = \sigma_0^{n-k-1} (\sigma_0 - 1)$ общее число притоков, а следовательно, и пунктов наблюдений составит при $\sigma_0=3$, $S_{\text{общ}} = 2 \sum_{i=k}^N 3^{N-i}$, где $N=n=12$; $k=9$. Следовательно, $S_{\text{общ}} = 2(3^0+3^1+3^2+3^3) = 80$. Общее число узлов в данном случае будет $80 \times 292 = 23360$.

Перейдем теперь к информационным оценкам. Как указывалось, в общем виде количество информации по К. Шеннону определяется формулой

$$q = H(Q) - H(Q/Q_{\text{изм}}),$$

где $H(Q)$ — энтропия значения расхода до измерения; $H(Q/Q_{\text{изм}})$ — энтропия погрешности после измерения значения $Q_{\text{изм}}$. Так как энтропия, в свою очередь, определяется формулой

$$H(Q) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(Q) \ln p(Q) dQ,$$

то строго подсчитать общее количество информации по всему бассейну довольно затруднительно, ибо для этого надо знать плотность распределения самого измеряемого расхода и закон распределения погрешностей измерения. В принципе это возможно, если задаться априори общепринятыми в гидрологии законами распределения, но сразу же встает ряд проблем, так как, строго говоря, речь должна идти о законах распределения «мгновенных» расходов. Прикидочные расчеты можно выполнить, если принять равномерное распределение. Тогда

$$q = \lg(Q_{\text{макс}} - Q_{\text{мин}}) - \lg d_{\text{экив}},$$

где $Q_{\text{макс}} - Q_{\text{мин}}$ — диапазон изменения расхода; $d_{\text{экив}}$ — эквивалентный по энтропии интервал неопределенности, равный, например, для нормальных распределений $4,132 \sigma$ (σ — среднее квадратическое отклонение). Однако даже такого упрощения недостаточно, так как фактический диапазон неизвестен. Поэтому примем (в надежде сохранить хотя бы порядок получаемых значений информации) для расчета формулу, исходя из того, что известна норма расхода на каждом притоке (из законов Хортон):

$$q_h = \lg(Q_h - 0,05 Q_h) - \lg 4,132 \sigma,$$

где $\sigma = 0,05 Q_h$. Ограничиваясь нормой стока, мы сужаем диапазон, а тем самым уменьшаем получаемое количество информации. Так как

$$q = \lg[Q_h(1 - 0,05)] - \lg 4,132 \cdot 0,05 Q_h = 0,663 [\text{дит}],$$

то при сделанных допущениях измерение расхода на любом притоке несет одинаковое количество информации. Вообще говоря, так как условия измерений и законы распределения расходов на малых и крупных реках различны, то такого совпадения не должно быть, но с другой стороны общее число различных грааций, логарифм которого пропорционален количеству информации, одинаково для обычных условий (исключение составляют очень малые водотоки с расходом в несколько м³/с, но они заведомо в данном случае исключены из рассмотрения). Произведение q_h на общее число узлов измерений и дает искомое количество информации: $0,663 \times 23360 = 15488$ [дит].

Остановимся на возможном подходе к экономическим оценкам. В соответствии с нормами на изыскательские работы вертушечные измерения расхода оцениваются в пределах 27—149 руб. в зависимости от ширины реки. Поэтому можно подсчитать сколько «стоит» один дит информации, исходя из пропорции

0,663 дит	—	(27—149) руб.
1,000 дит	—	x руб.,

и тем самым определить общие затраты на получение расходов по всему бассейну. При этом надо учитывать, что если расход определяется по связи $Q=f(H)$, то стоимость информации резко снижается.

Таким путем можно оценить примерный объем капиталовложений для метрологического обеспечения осваиваемых речных бассейнов. Ясно, что традиционный способ определения расхода методом «скорость — площадь» не может обеспечить быстрого роста оперативной сети из-за того, что он развивался для относительно редких, режимных наблюдений и поэтому: а) не допускает автоматизации; б) трудоемок и относительно дорог; в) не обеспечивает требуемой точности при измерениях в неустановившихся потоках. Следовательно, встает задача расширения способов измерений. Эффективным может оказаться усовершенствование способа учета стока на основе зависимости $Q=f(H)$ и в первую очередь для случая неустановившегося режима. Решающим фактором в данном случае является хорошо развитая приборная база для измерения уровня воды. Поэтому ниже рассмотрим математические модели речной гидрометрии применительно к данной задаче.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕЧНОЙ ГИДРОМЕТРИИ И ИХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

2.1. Детерминированные и стохастические измерительные модели гидрометрии

Из предыдущего изложения видно, что наряду с вопросами о количестве постов и частоте измерений гидрологических характеристик важное место занимает также проблема выбора математических моделей для определения $(d\vec{W}/d\mu)_{изм.}$, т. е. измерительных моделей, например — расхода воды $\partial W/\partial t=Q$. В качестве последней наибольшее распространение в гидрометрии получила модель «скорость — площадь»

$$Q = \int_F u \cos \alpha dF$$

(здесь u — локальная скорость, α — угол между направлением скорости и нормалью), для реализации которой необходимы довольно трудоемкие вертушечные измерения локальных скоростей. Подобный способ измерения не очень подходит для решения оперативных задач, связанных с управлением водохозяйственными системами или прогнозом их состояния. Действительно, в отличие от режимных задач, в данном случае постов наблюдения за стоком должно быть в рассматриваемом речном бассейне значительно больше, а измерения на них должны проводиться более часто. Кроме этого, как правило, целью управления системой является поддержание какого-либо динамического состояния в течение времени намного превосходящего продолжительность переходного процесса. Управление сводится к изменению в нужном направлении запаса $\vec{W}(A)$. При этом управлять можно, варьируя носитель A (например, появление новых дуг в графе речной системы при переброске стока), либо меняя градиенты $d\vec{W}/d\mu$ (например, регулирование речного стока). Короче говоря, состояние речной системы непрерывно меняется, а следовательно, способ «скорость — площадь», занимающий иногда несколько часов, не подходит, так как за время производства измерений расход в створе может существенно измениться.

Так как приборов для непосредственного измерения расхода воды в настоящее время нет (пройдет определенное время пока ультразвуковые расходомеры займут свое место в гидрометрии), то представляется разумным использовать модели расхода, основанные на связи $Q=f(H)$, например в виде полинома $Q=a_0+a_1H+a_2H^2+\dots$. Однако эта связь может быть и неоднозначной. Остановимся на причинах этой неоднозначности, опираясь на основную модель речной гидравлики — систему уравнений Сен-Венана:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q^2}{C^2 R F^2} + \frac{1}{gE} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2\alpha Q}{gF^2} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

где g — ускорение свободного падения; α — коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению; $-\partial H/\partial x = i - \partial h/\partial x = I$; i — уклон дна, равный примерно уклону потока I_0 в квазиравномерном режиме; h — глубина.

Линеаризованное (относительно U_0, h_0) динамическое уравнение, записанное относительно безразмерной скорости $\bar{U}$, будет

$$\frac{I g}{k} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\lambda U_0}{2h_0} \bar{U}$$

(здесь k — параметр, λ — коэффициент гидравлического сопротивления). Этому уравнению соответствует амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W_{IU}(i\omega) = \frac{\lambda U_0 k}{2h_0 g} + i\omega \frac{k}{g},$$

которая порождает амплитудную и фазовую характеристики

$$A = \sqrt{\left(\frac{\lambda U_0 k}{2h_0 g}\right)^2 + \frac{\bar{\omega}^2 k^4}{h^2 g^2}},$$

$$\varphi = \text{artg} \frac{2\bar{\omega}k}{\lambda U_0}$$

(здесь $i = \sqrt{-1}$, $\bar{\omega}$ — безразмерная частота). На рис. 2.1 показаны графики этих соотношений.

Физический смысл этих характеристик в данном случае заключается в том, что они показывают, как меняется отношение амплитуд колебаний уклона и скорости A , а также сдвиг фаз φ и между ними в зависимости от частоты. Как отношение амплитуд так и сдвиг фаз с ростом частоты колебаний увеличиваются, что говорит, например, о том, что максимум уклона наступает раньше максимума скорости. Вспомним в связи с этим известный в речной гидравлике факт о последовательности наступления в гидростворе максимумов характеристик потока: уклон, скорость, расход, уровень. Таким образом, если уклон будет меняться по закону $I = \sin \omega t$, то скорость также представляет синусоиду, но с амплитудой и фазой, зависящими от частоты $U = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$, как показано на рис. 2.2. Следовательно, если не считать деформаций русла (например, размыв приводит к тому, что тот же самый расход воды проходит при меньшем уровне), то основными причинами неоднозначности кривых $Q = f(H)$ являются условия, порождающие инерционные члены в уравнениях (неустановившееся движение, переменный подпор и др.), т. е. динамические факторы.

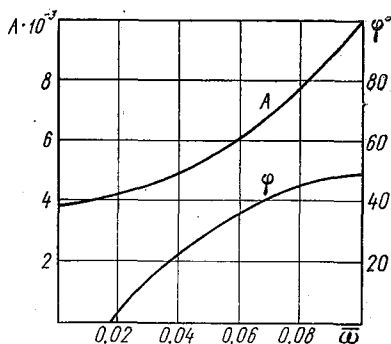


Рис. 2.1. Амплитудная и фазовая частотные характеристики.

По мере стабилизации режима ($\omega \rightarrow 0$) значение динамической «погрешности» $\Delta \rightarrow 0$, «петля» сужается, и справедливой становится однозначная зависимость $Q = f(H)$. Знание зависимостей

$A=f(\bar{\omega})$ и $\varphi=f(\bar{\omega})$ позволяет установить граничные значения частот $\omega_{гр}$, при которых связь $Q=f(H)$ при заданной точности измерения надо рассматривать как неоднозначную. В случае, если $\bar{\omega} > \omega_{гр}$ возникает «петля», к выводу уравнения которой и перейдем.

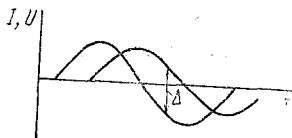


Рис. 2.2. К происхождению динамической погрешности Δ .

Система уравнений Сен-Венана довольно полно описывает в одномерной гидравлической идеализации движение неустановившегося потока в русле. В результате ее решения (это трудоемкая самостоятельная задача речной гидравлики) находят функции $Q=f(x, t)$ и $H=f(x, t)$ при известных начальных и граничных условиях. Часто говорят, что уравнения в частных производных описывают поведение системы с распределенными параметрами.

В гидрометрии, однако, во-первых, имеют дело с конкретными закрепленными гидросторами (т. е. координата x фиксированная, $x=x_0$), а во вторых, молчаливо предполагается, что морфометрические характеристики (B, F, R и др.) гидростора и ход уровня во времени $H=f(t)$ легко измерить. Если вдобавок к этому предположить, что для фиксированного гидростора с координатой x_0 известны зависимости $C=f(H)$ и $I=f(t)$ (из измерений), то подставляя производную $\partial Q/\partial x = -\partial F/\partial t$ в динамическое уравнение, его можно записать в виде дифференциального уравнения в полных производных (уравнение Рикатти):

$$\frac{dQ}{dt} = f_1(x_0, t) Q^2 + f_2(x_0, t) Q + f_3(x_0, t), \quad (2.1)$$

$$\text{где } f_1(x_0, t) = -\frac{g}{C^2 R F}; \quad f_2(x_0, t) = \frac{2\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial t}; \quad f_3(x_0, t) = g I F.$$

Решить его — значит найти для фиксированного гидростора зависимость $Q=f(t)$ при известном начальном расходе, коэффициентах $f_1(x_0, t)$ и $f_2(x_0, t)$ и свободном члене $f_3(x_0, t)$. Так как $F=f(H)$, $C=f(H)$, $R=f(H)$, то при заданном значении α и измеренном уклоне I имеем, что $Q=f(H, \partial H/\partial x, \partial H/\partial t)$, так как $\partial H/\partial x = -I$, а $\partial H/\partial t$ однозначно определяется функцией $H(t)$ при непрерывном или дискретном (с достаточной частотой) ее измерении. Таким образом, если в условиях равномерного режима зависимость $Q=f(H)$ является однозначной и определяется формулой Шези, то в условиях плавно изменяющегося движения она определяется нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами, которое по существу является уравнением петлеобразной зависимости $Q=f(H)$ («петли»). Можно показать, что в еще более общем случае неплавноизменяющегося движения имеет место зависимость $Q=f(H, \partial H/\partial x, \partial H/\partial t, \partial^2 H/\partial x^2, \partial^2 H/\partial x \partial t, \dots)$, т. е. расход зави-

сит не только от уровня и уклона, но и от кривизны свободной поверхности, что, однако, является редким для гидрометрии случаем.

Полученное уравнение петли может быть решено численными методами (например, Рунге — Кутта) или на аналоговой моделирующей машине (например, типа МН-7) в реальном масштабе времени. В последнем случае имеем устройство для измерения расхода воды, первичными измерительными преобразователями которого являются уровнемер и уклономер.

До сих пор молчаливо предполагалось, что расход воды детерминированно («однозначно») связан с параметрами, входящими в уравнение петли $H, C, I, R, F, \alpha, \partial F/\partial t$, которые также предполагались детерминированными величинами. Так как уровень воды H измеряется с погрешностями, а заданные первоначально параметры (C и др.) непрерывно флуктуируют (например, из-за неизбежных деформаций русла), то в реальной ситуации описание должно проводиться стохастическим дифференциальным уравнением, решением которого будет плотность вероятности расхода $p(Q, t)$. Чтобы хоть в какой-то мере строго изложить вопросы, связанные со стохастическим подходом, необходим довольно глубокий экскурс в теорию дифференциальных уравнений и случайных процессов, что выходит за рамки данного курса. Поэтому приведем необходимые результаты в «готовом виде».

Стохастическим обобщением полученного выше дифференциального уравнения может служить следующий модельный аналог:

$$\dot{Q} = [-C(t) + V(t)]\varphi(Q) + X(t), \quad (2.2)$$

где $C(t) = gF/K^2$; $X(t) = gFI + (\partial F/\partial t)2\alpha Q/F$; $K = CF/\sqrt{R}$; $V(t)$ — параметрический шум.

Последний член в этом уравнении будем считать входным измеряемым процессом, причем, так как $gFI \gg 2\alpha Q(\partial F/\partial t)/F$, то вторым членом, входящим в $X(t)$, можно пренебречь (тем более, что он знакопеременный), либо рассматривать его как аддитивную помеху, оцениваемую нормой $\|2\alpha U(\partial F/\partial t)\|$ (последнее не лишено смысла, если учесть неясность с величиной корректирующего коэффициента α , значение которого зависит от ряда трудно учитываемых факторов: характера турбулентности и т. д.). Функция $\varphi(Q)$ — нелинейная (квадратичная $\varphi(Q) = Q^2$ в полностью развитом турбулентном режиме). Изменение расхода воды, описываемое данным уравнением, при ряде допущений представляет собой непрерывный марковский случайный процесс, полное описание которого дает уравнение для плотности вероятности — уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial Q} A(Q, t)p(Q, t) + 0,5 \frac{\partial^2 B(Q, t)p(Q, t)}{\partial Q^2}.$$

В этом уравнении, вывод которого довольно сложен, величины $A(Q, t)$ и $B(Q, t)$ называются коэффициентами сноса и диффузии и определяются формулами:

$$A(Q, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[\Delta \tilde{Q} / \tilde{Q}(t) = Q],$$

$$B(Q, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[\Delta \tilde{Q} \Delta \tilde{Q} / \tilde{Q}(t) = Q],$$

где M — знак математического ожидания; $\Delta \tilde{Q}$ — приращение расхода.

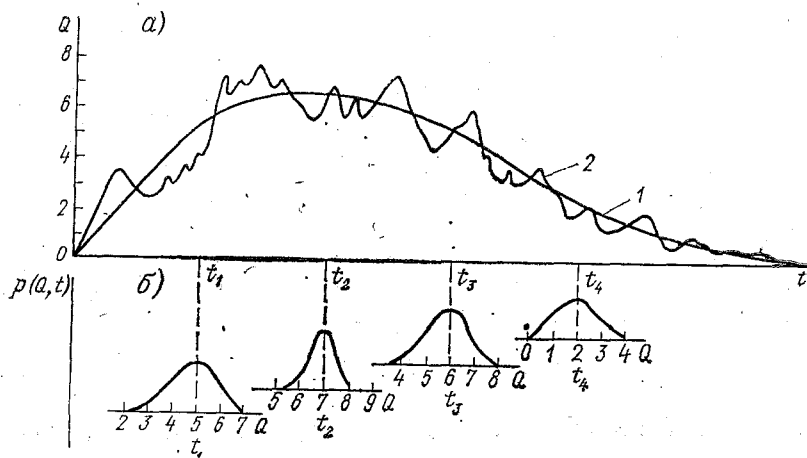


Рис. 2.3. Зависимости $Q=f(t)$ (а): 1 — решение по детерминированной модели; 2 — возможная случайная реализация и $p(Q)=f(t)$ (б): для четырех временных сечений.

Эти коэффициенты определяют скорость изменения первого и второго условных математических ожиданий приращений случайного процесса изменения расхода воды. Коэффициенты $A(Q, t)$ и $B(Q, t)$ для уравнения (2.2) вычисляются по формулам (в случае $\varphi(Q) = Q^2$):

$$A = -(C - 0,5 G_v) Q^2 + X,$$

$$B = G_v Q^4,$$

где G_v — интенсивность параметрического шума.

В результате решения уравнения ФПК (для этого существуют численные и аналитические методы) при начальном и граничном условиях:

$$p(Q, \tau) = p_0(Q); p(+\infty, t) = p(-\infty, t) = 0$$

в условиях нормировки

$$p(Q, t) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(Q, t) dQ = 1$$

получаем эволюцию закона распределения расхода воды в створе.

Рис. 2.3 иллюстрирует возможности детерминированной и стохастической моделей. Если задаться определенным уровнем значимости

$$\beta = 1 - P_{\text{дов}} = 1 - \int p(Q, t) dQ$$

(здесь $P_{\text{дов}}$ — доверительная вероятность), то можно показать интервал неопределенности, которым должна быть окружена петля расхода (рис. 2.4).

Таким образом, стохастические модели одновременно улавливают и динамику изменения расхода воды и случайные его отклонения за счет погрешностей и флуктуаций морфометрических и гидравлических параметров.

Следует иметь в виду, что во всех рассуждениях этой главы (как и во всем курсе) из-за сложности опускается такой важный вопрос как влияние инерционности движения на гидравлические сопротивления (по этому вопросу см. [6]).

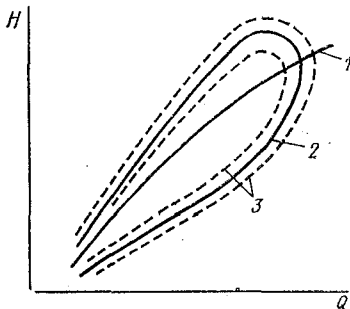


Рис. 2.4. Кривые $Q=f(H)$:

1 — однозначная зависимость; 2 — по детерминированной модели; 3 — по уравнению ФПК.

2.2. Корректность измерительно-расчетных моделей.

Метод функций чувствительности

В п. 2.1 получены детерминированное и стохастическое уравнения для расхода воды. Чтобы определить зависимость расхода (или его плотности вероятности) от времени, необходимо произвести расчет по дифференциальным уравнениям, т. е. выполнить интегрирование. Так как в эти расчетные уравнения входят непосредственно измеряемые параметры (например, $H=f(t)$ или $I=f(t)$), то естественно эти модели назвать измерительно-расчетными. Однако при таком подходе возникает очень сложный вопрос о корректности ввода измерительной информации, которая заведомо не может быть очень точной, в соотношения, получаемые из законов сохранения, и в этом смысле являющимися «точными»,

т. е. встает проблема «стыковки» математической модели с данными измерений.

Вопрос ставится так: могут ли бесконечно малые погрешности в измерениях $H(t)$ и $I(t)$ привести к конечной погрешности определения расхода воды Q ? Для исключения этого необходимо, чтобы топологическая структура фазовых траекторий (характер решения) не менялась при малом изменении параметров. Иногда говорят, что физическая система должна быть «грубой» (в нашем случае — «гидрометрически грубой»), т. е. решение дифференциального уравнения (2.1), $Q=f(t)$, не должно иметь скачков при плавном изменении f_1 , f_2 и f_3 . Иначе говоря, решение должно быть устойчивым. Прежде чем исследовать этот вопрос, заметим, что соотношение (2.1) получено из уравнений гидравлики и включает в себя такие довольно трудно оцениваемые параметры как коэффициент Шези и коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению. Можно получить более простое уравнение для определения расхода и другим путем. Так как $Q=f[H(x, t)]$, то

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial H} dH = \frac{\partial Q}{\partial H} \left(\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right).$$

Разделив левую и правую части на dt , получим

$$\frac{dQ}{dt} = f_1(x_0, t) Q + f_2(x_0, t),$$

$$\text{где } f_1(x_0, t) = \frac{1}{F} \frac{\partial Q}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad f_2(x_0, t) = \frac{\partial Q}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

При известной из непосредственных измерений информации об уровне H и его производных по времени и продольной координате, а также морфометрии створа (т. е. $F(H)$), это выражение есть дифференциальное уравнение для определения расхода Q . Частная производная $\partial Q/\partial H$, которая берется при фиксированных x и t (т. е. при равномерном режиме движения), должна быть известна и представляет собой вариант задания гидравлических сопротивлений, минуя формулу Шези.

Заметим, что такой способ ближе к практической гидрометрии, ибо значение $\partial Q/\partial H$ однозначно определяется из кривых расходов — зависимостей $Q=f(H)$, составляющих на сегодняшний день основу речной гидрометрии.

Исследовать устойчивость решения дифференциального уравнения (2.1) при возмущении его параметров в общем виде затруднительно. Этот «академический» вопрос еще далек от окончательного решения. Если бы существовали способы аналитического решения уравнения, то подобной проблемы не возникло, ибо можно было бы, варьируя параметры f_1 , f_2 и f_3 , определить, как ведет себя при этом расход, т. е. устойчивость решения уравнения (2.1).

В технике, однако, существует приближенный метод, позволяющий исследовать реакцию расхода на изменения параметров, не решая само уравнение (2.1). Это — метод функций чувствительности. Запишем уравнение (2.1) в виде

$$F(\dot{Q}, Q, M, N, P) = 0$$

(здесь $M=f_1$, $N=f_2$, $P=f_3$). Нас интересует вопрос о точности определения расхода с помощью этого уравнения, если, например, коэффициент P ($P=gFI$) измеряется с какой-либо погрешностью.

Обозначим через $Q(P_0, t)$ значение расхода, определенное по уравнению (2.1) при точном значении коэффициента $P=P_0$, а через $Q(P_0+\Delta P, t)$ — приближенное решение при значении коэффициента P , измеренного с погрешностью ΔP . Раскладывая приближенное значение расхода в ряд Тейлора относительно ΔP , получим

$$Q(P_0+\Delta P, t) \approx Q(P_0, t) + \frac{\partial Q(P_0, t)}{\partial P} \Delta P. \quad (2.3)$$

Функцией чувствительности называется частная производная от искомого решения по исследуемому параметру

$$\gamma(P_0, t) = \frac{\partial Q(P_0, t)}{\partial P}.$$

Ее физический смысл в данном случае заключается в том, что она показывает, как сильно изменяется расход воды при изменении параметра, входящего в дифференциальное уравнение. Функция чувствительности определяется в результате решения уравнения чувствительности, которое получается дифференцированием исходного уравнения (2.1) по исследуемому параметру. В нашем случае имеем

$$\left. \frac{dF}{dP} \right|_{P=P_0} = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} \right|_{P=P_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial P} \right|_{P=P_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial P} \right|_{P=P_0} = 0,$$

где

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{Q}} \right|_{P=P_0} = -1, \quad \left. \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} \right|_{P=P_0} = \dot{\gamma}(P_0, t),$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_{P=P_0} = 2 Q(P_0, t) M(t) + N(t),$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial P} \right|_{P=P_0} = \gamma(P_0, t), \quad \left. \frac{\partial F}{\partial P} \right|_{P=P_0} = 1.$$

Таким образом получаем следующее уравнение чувствительности:

$$\gamma(P_0, t) - [2 Q(P_0, t) M(t) + N(t)] \gamma(P_0, t) - 1 = 0,$$

которое будучи линейным решается аналитически, и выражение для функции чувствительности можно записать в явном виде. Подставляя это решение в выражение (2.3), можно определить влияние погрешности ΔP на точность определения расхода. Аналогично следует поступить с параметрами M и N .

Используя подобный подход, можно сформулировать требования к измеряемым параметрам H и I , исходя из заданной точности определения расхода.

Изменение значения измеренного расхода зависит от истинной вариации уклона и уровня и отклонений, связанных с погрешностями (методическими и инструментальными)

$$\delta Q(t) = \xi_1(t) \delta H + \xi_2(t) \delta I,$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — функции чувствительности расхода соответственно к уровню и уклону.

С учетом уравнения (2.1) получим выражения для $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Запишем (2.1) в виде $\psi(\dot{Q}, Q, I, H, t) = 0$. В соответствии с методом функций чувствительности, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial H} \Big|_{H_0} + \frac{\partial \psi}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial H} \Big|_{H_0} + \frac{\partial \psi}{\partial H} = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial H} \Big|_{H_0} &= \xi_1(t), \quad \frac{\partial Q}{\partial H} \Big|_{H_0} = \xi_1(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{Q}} = \frac{1}{gF_0}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial Q} &= \frac{2Q_0}{K_0^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial H} = -2Q_0^2 K_0^{-3} \cdot \frac{\partial K}{\partial H} \Big|_{H_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{H_0} \frac{1}{g} F_0^{-2} \frac{\partial F}{\partial H} \Big|_{H_0} + \\ &+ \frac{4Q_0}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{H_0} F_0^{-3} \frac{\partial F}{\partial H} \Big|_{H_0}, \end{aligned}$$

получим дифференциальное уравнение для $\xi_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{gF_0} \xi_1 + \frac{2Q_0}{K_0^2} \xi_1 - 2Q_0^2 K_0^{-3} \frac{\partial K}{\partial H} \Big|_{H_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{H_0} \frac{1}{g} F_0^{-2} \frac{\partial F}{\partial H} \Big|_{H_0} + \\ + \frac{4Q_0}{g} \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{H_0} F_0^{-3} \frac{\partial F}{\partial H} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем уравнение чувствительности для $\xi_2(t)$:

$$\frac{1}{gF_0} \xi_2 + \frac{2Q_0}{K_0^2} \xi_2 - 1 = 0.$$

В силу линейности уравнений их решения, как уже указывалось, могут быть представлены в аналитическом виде, и оценки

для допустимых вариаций δH и δI находятся в результате минимизации функционала

$$\Phi = \int_0^T \left[\delta Q(t) - \sum_{i=1}^2 \xi_i(t) \delta \alpha_i \right]^2 dt,$$

где $\alpha_1 \equiv H$, $\alpha_2 \equiv I$.

Если учесть общепринятую на гидрологической сети погрешность измерения уровня 0,01 м и ограничиться квазиустановившимся режимом, для которого из уравнений чувствительности получается:

$$\xi_1 = Q_0 (\partial K / \partial H) / K_0, \quad \xi_2 = K_0^2 / 2 Q_0,$$

то выражение для вариации расхода примет вид

$$\delta Q(t) = \frac{Q_0}{K_0} \frac{\partial K}{\partial H} 0,01 + \frac{K_0^2}{2 Q_0} \delta I.$$

Исходя из определения точности, как числа градаций на октаву диапазона, перепишем это соотношение следующим образом:

$$\frac{1}{2,97} = \frac{Q_0^2}{K_0} \frac{\partial K}{\partial H} 0,01 + \frac{K_0^2}{2} \delta I.$$

Из этого выражения при заданной (желаемой) относительной погрешности γ измерения (или определения) расхода могут быть получены допустимые вариации δI погрешности определения уклона. Эта погрешность зависит не только от метрологических возможностей, но и от гидравлических характеристик самого потока (например, $\partial K / \partial H$). В случае измерения уклона по перепаду уровней $I \approx (H_1 - H_2) / L$ необходимо включить в рассмотрение и параметр L (длину базиса).

Естественно, что он должен быть таким, чтобы уклон был измерен точно. Возникает, однако, нетривиальный вопрос: что значит «точно»? Если исходить из уравнений гидравлики, то уклон — это

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta x},$$

т. е. самым лучшим базисом $\Delta x = L$, казалось бы, является нулевой (заметим, что способы измерения уклона практически в «точке» существуют). На самом деле, однако, это не так.

Для получения количественных критериев с целью назначения местоположения оптимального гидроствора и длины базиса естественно построить критерий, который в наиболее «выгодном» гидростворе принимал бы экстремальное значение. При его построении надо исходить из цели наблюдений над уклонами. Официаль-

ные нормативные документы (Наставления) ставят две основные задачи, для решения которых нужна информация об уклоне: вычисление расхода воды по измеренным уклонам и определение гидравлических сопротивлений (коэффициента Шези C). Следова-

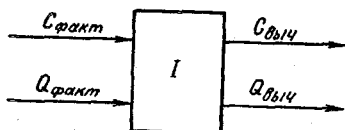


Рис. 2.5. Взаимозависимость через измеренный угол вычисляемых и фактических характеристик потока.

тельно, если координата местоположения гидрометрического створа x_0 выбрана, то длина базиса должна назначаться такой, чтобы, с одной стороны, перепад уровней, измеренный на нем, хорошо реагировал на фактические изменения расхода и сопротивлений в реке, а с другой, его использование при вычислениях расхода и коэффициента Шези было бы эффективным, т. е. вычисляемые расход и коэффициент Шези хорошо реагировали на изменения уклона (рис. 2.5).

Чувствительность одних параметров к изменению других характеризуется функциями чувствительности, т. е. частными производными. В нашем случае набор частных производных определяется следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial C_{\text{факт}}} & \frac{\partial C_{\text{выч}}}{\partial I} \\ \frac{\partial I}{\partial Q_{\text{факт}}} & \frac{\partial Q_{\text{выч}}}{\partial I} \end{pmatrix}.$$

Так как при фиксированном гидростворе уклон зависит от длины базиса L , то и матрица зависит от L , т. е. $A=f(L)$. Таким образом, каждой длине базиса L соответствует своя матрица A (т. е. свой набор чисел — таблица). Значит надо, сравнивая между собой эти наборы чисел, выбрать наилучший. Однако вначале курса уже указывалось, что сравнивать между собой мы умеем только числа, а не функции и тем более таблицы. Следовательно, каждой матрице необходимо сопоставить ее норму и выбрать такой базис, чтобы норма была экстремальной.

Одной из самых простых норм может служить определитель матрицы $\|A\|$. Тогда задача выбора длины базиса сводится к следующей экстремальной задаче.

$$\left. \frac{\partial \|A\|}{\partial \Delta x} \right|_{\Delta x = L} = 0,$$

т. е. к общей идее процесса измерений: оптимальные измерения должны обеспечить экстремум выбранного критерия качества.

Однако в таком общем виде задача назначения базиса L сложна и не всегда оправдана, ибо во многих случаях можно

ограничиться рассмотрением квазиустановившегося режима и только наиболее важным (в задаче определения расхода) элементом матрицы A : функцией чувствительности расхода к уклону.

Уклон в точке свободной поверхности является в общем случае случайной тензорной величиной. В уравнения же гидравлики входит уклон, который наряду с пропускной способностью определяет расход воды, проходящей через гидроствор. Значение расхода определяется не случайными колебаниями свободной поверхности (за счет, например, ветровой ряби), а общим падением уровня на участке реки. В силу инерционности движущейся воды мгновенный или местный уклон может и не характеризовать фактический расход в гидростворе. Масса воды должна пройти определенное расстояние, чтобы перепад уровней на нем характеризовал расход. Эти качественные рассуждения подтверждаются анализом уравнения для функции чувствительности S расхода к уклону, имеющему структуру

$$\dot{S}(x) + aS(x) = b,$$

где a , b — параметры, зависящие от гидравлических и морфометрических характеристик русла на рассматриваемом участке.

Решение этого уравнения явно зависит от x , и теоретически величина S достигает максимального значения при $x \rightarrow \infty$. Практически же, как это принято при исследовании динамических систем, разумно ограничиться тем значением $x=L$, при котором экспоненциальный множитель в решении для S достигает уровня 0,63. По аналогии с динамическими системами, введем понятие «постоянная длины», которую и примем за оптимальный базис для измерения уклона. Учитывая только основные гидравлические характеристики и морфометрию русла, получим из решения уравнения для S формулу для длины базиса

$$L = \frac{h^{4/3} F}{gn^2 F - 0,5 h^{4/3} (\partial F / \partial x)_*},$$

где $(\partial F / \partial x)_*$ — морфометрический градиент; n — коэффициент шероховатости.

2.3. Параметризация измерительных моделей гидрометрии

В п. 2.1 получена математическая модель «петли», служащая для определения расхода воды при неустановившемся движении. Для того чтобы ею воспользоваться необходимо: 1) ввести в эту модель непосредственно измеряемые величины (H , I) и 2) задать параметры, входящие в уравнение (пропускную способность K и уклон равномерного режима I_0), т. е., как принято говорить в настоящее время, параметризовать модель.

Задача параметризации — частный случай более общей проблемы идентификации, предметом, которой являются методы определения математических моделей по результатам эксперименталь-

ных исследований. Так как у нас такая модель получена сравнительно строгим путем из общих уравнений гидравлики, обоснованных огромным опытом их применения в науке и технике, то мы вкладываем более узкий смысл в понятие идентификации, понимая под ней определение параметров априорно заданного дифференциального уравнения.

В нашу задачу входит параметризация уравнения (2.1), а именно задание входящих в него параметров K и I_0 . Это можно осуществить различными способами. Для определения I_0 надо произвести измерения уклона при равномерном режиме, либо (что более сложней) провести нивелировку дна по длине потока и оценить осредненное значение уклона.

Наиболее важным и ответственным является определение пропускной способности. Первый способ заключается в следующем. Так как пропускная способность связана с распределением скоростей по живому сечению и характером турбулентности, то для ее определения можно привлечь трехмерную гидромеханическую модель турбулентного потока. Однако в связи с незамкнутостью уравнений Рейнольдса этот путь кроме трудоемкости и сложности, еще и не надежен, так как на гидромеханическом уровне (т. е. более глубоко, чем гидравлический — одномерный) все равно приходится привлекать различные гипотезы и подчас ненадежные экспериментальные данные.

Второй способ заключается в определении $K = C\sqrt{R}F \approx \frac{1}{n} h^{1/6} h^{1/2} F$ путем задания коэффициента шероховатости n , например по таблице М. Ф. Срибного, исходя из качественного описания характера русла в районе гидрометрического створа. Очевидно, однако, что при таком подходе получится значительный произвол субъективного характера.

Третий, наиболее надежный, путь заключается в определении функции $K = f(H)$ непосредственно из измерений расхода и уровня воды при различных наполнениях русла и вычислении пропускной способности по формуле Шези

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I_0}}.$$

Однако этот способ также обладает рядом недостатков, так как, во-первых, не всегда имеется возможность искусственно создавать различные наполнения русла со стабилизированным режимом (например, устьевой участок реки), а во-вторых, он достаточно трудоемок и требует много времени. Эти недостатки можно устранить (при этом, правда, появляются другие) путем производства измерений расхода, уклона и уровня для какой-либо конкретной волны неустановившегося режима с дальнейшим вычислением $K(H)$ непосредственно по самому уравнению петли (2.1). Такую возможность, основанную на идеях теории идентификации, разберем на конкретной практической задаче.

Известно, что в основе наиболее распространенного способа учета стока воды на реках и каналах лежит однозначная зависимость расхода воды от уровня. Для ее получения необходимо провести серию параллельных наблюдений за двумя этими характеристиками во всем диапазоне их изменения, т. е. осуществить градуировку. Так, например, по техническим условиям эксплуатации расходомерных устройств в системе Минводхоза СССР периодически должна проводиться их аттестация, т. е. корректировка зависимости $Q=f(H)$. Ясно, что в вегетационный период

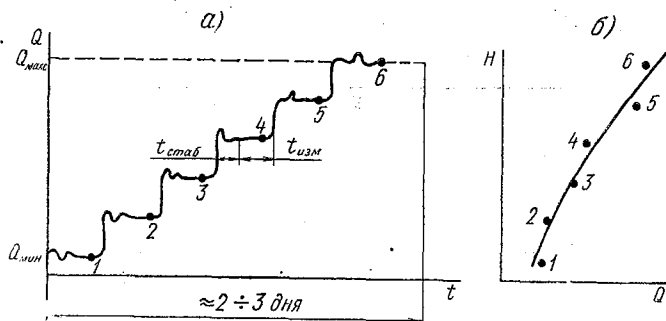


Рис. 2.6. График, поясняющий процесс градуировки с помощью вертушечных измерений (при установившихся режимах) (а), и градуировочная кривая (б).

длительное вмешательство, неизбежное при градуировке, в технологический режим мелиоративной системы ведет, кроме бесполезного с точки зрения водопользователей расходования воды, также к денежному убытку. Градуировка одного гидросооружения может занимать 2—3 суток, что связано с затратой времени $t_{\text{стаб}}$, необходимого для стабилизации расхода на каждом поддиапазоне уровня по всей его амплитуде после каждого маневрирования затворами водопропускных отверстий, а также длительностью $t_{\text{изм}}$ довольно трудоемких вертушечных измерений (рис. 2.6).

Применение ультразвуковых расходомеров сокращает время градуировки до нескольких часов за счет уменьшения интервала $t_{\text{изм}}$. Однако более радикальным путем является установление однозначной зависимости расхода от уровня по измерениям гидравлических параметров какой-либо конкретной волны неустановившегося режима (рис. 2.7).

Рассмотрим методику решения подобной задачи. Математическим описанием динамики многих объектов является уравнение

$$\dot{y} = f(y, x, \vec{a}), \quad (2.4)$$

которое связывает выходную величину процесса (устройства) с изменением входной величины $x(t)$ и вектором параметров $\vec{a}$ (рис. 2.8). Подав на объект, находящийся в начальном состоянии

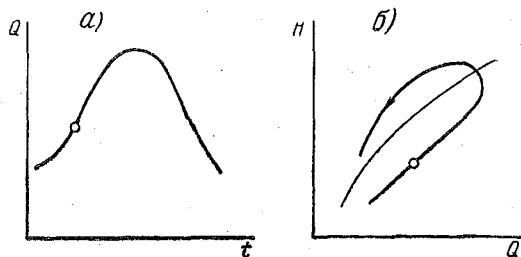


Рис. 2.7. Волна попуска (а) и градуировочная кривая (б), построенная по петлеобразной кривой $Q=f(H)$.

$y(0)=y_0(0) \in Y_0$, возмущение $x_0 \in X$, получим экспериментальный переходной процесс $y_a(t)$, $0 \leq t \leq T$. Уравнение (2.4) при $\vec{a}=\vec{a}_0$ и исследуемый объект (явление) рассматриваются как адекватные на пересечении $Y_0 \cap X$, если $\forall y_0(0) \in Y_0$ и $x_0 \in X$ функции y_0 и y_a будут близкими в смысле метрики подходящего метрического пространства.

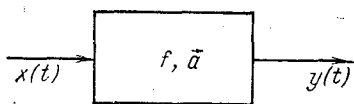


Рис. 2.8. Входная $x(t)$ и выходная $y(t)$ величины объекта, характеризуемого функцией f и вектором параметров $\vec{a}$.

Если сигналы x_0 и y_a не искажены случайными помехами, то используется пространство непрерывных функций $C[0, T]$. а при среднеквадратической характеристике точности (2.4) — пространство интегрируемых с квадратом функций $L_2[0, T]$, имеющее метрику

$$\rho_{L_2} = \left(\int_0^T (y_0 - y_a)^2 dt \right)^{0,5}.$$

Адекватности (2.4) реальному объекту можно достигнуть тремя способами: 1) варьированием структуры функции f ; 2) выбором вектора $\vec{a}$; 3) сужением множества $Y_0 \cap X$.

Уравнение (2.1), связывающее расход, уровень и уклон в фиксированном гидростворе, где, например, установлен расходомер, можно записать аналогично (2.4) следующим образом:

$$\dot{Q} = f(Q, I, \vec{a}), \quad (2.5)$$

где $\vec{a} = \{I_0, K\}$ — вектор идентифицируемых параметров, знание которых необходимо для построения однозначной зависимости $Q=f(H)$.

Использовать возможность выбора f мы не можем, так как структура уравнения (2.1) получена из основных уравнений гидравлики. Необходимо, правда, отметить, что система дифференциальных уравнений Сен-Венана, из которой получено (2.1), справедлива в случае выполнения так называемой гипотезы квазистационарности по гидравлическим сопротивлениям, т. е. в предположении, что $K=f(n, h)$ и не зависит от динамики потока, характеризующейся, например, производной dU/dt . Примерную оценку интенсивности режима, при котором это выполняется, можно получить так. Общая тенденция изменения турбулентности при неустановившемся движении устанавливается при рассмотрении потока со сдвигом. В области ядра его характеризуют расстояние от дна h и так называемая динамическая скорость

$$U_* = U(\lambda/2)^{0.5},$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления. Из этих величин составляется комбинация, имеющая размерность времени $t \sim h/U_*$. Пренебрежение зависимостью K от dU/dt тем более правомерно, чем больше характерное время неустановившегося движения T по сравнению с t . Структура течения в этом случае в каждый момент времени будет успевать перестраиваться применительно к новым условиям. Если за T считать время прохождения волны, то получим $T > t$, т. е.

$$T > h/U(\lambda/2)^{0.5}.$$

Таким образом, чтобы «уложиться» в структуру f , диктуемую классическими уравнениями гидравлики, необходимо, чтобы неустановившийся режим был не очень интенсивным.

Второй возможностью (выбором $\vec{a}$) займемся ниже. Что касается сужения множества, образуемого пересечением возможного набора начальных условий и входных воздействий $Y_0 \cap X$, то это можно сделать только в случае активной идентификации, т. е. когда имеется возможность управлять режимом потока. В обычных для гидрологии условиях пассивного наблюдения эта возможность практически исключается.

Определение вектора $\vec{a}$ по заданным Q и I , в отличие от выбора f , легко формализуется путем перехода к вспомогательной экстремальной задаче. Допуская разрывы первого рода для I и Q (измерить уклон и расход точно не удастся и надо считать, что, например, $Q_a(t) = \bar{Q}(t) + z(t)$, где $\bar{Q}(t)$ — истинная реализация расхода при I_a ; $z(t)$ — случайная помеха, обязанная флуктуациям, не учитываемым (2.1), и погрешностям измерения), считаем, что I и Q принадлежат пространству $L_2 [0, T]$, метрика которого носит интегральный характер, не так чувствительна к $z(t)$ и более объективно характеризует измеренные величины. Запишем функционал

$$L(\vec{a}) = \int_0^T (Q_a - Q(t, \vec{a}))^2 dt = \|Q_a - Q(t, \vec{a})\|_{L_2[0, T]}^2$$

и будем отыскивать $\vec{a}^* \in V$ такой, что

$$\inf_{\vec{a} \in V} L(\vec{a}) = L(\vec{a}^*),$$

а $Q(t, \vec{a}^*)$ удовлетворяет уравнению (2.5) при $I(t) \equiv I_0(t)$, $Q(0) \equiv Q_0(0)$. Поставленная так задача определения $\vec{a}^*$ должна быть в математическом отношении корректна, а именно должно существовать единственное решение $\vec{a}^*$, непрерывно зависящее от исходных данных.

Для корректного «поведения» вектора $\vec{a}^*$ важны свойства функционала $L(\vec{a})$ и множества V , допустимых значений $\vec{a}$, которые зависят, в свою очередь, от выбора функционального пространства.

Можно показать, что для $V \subset C[0, T]$ задача поставлена некорректно. Преобразование ее в корректно поставленную называется регуляризацией. Обычно это делается путем сужения или расширения множества V , использования других функциональных пространств для описания данных измерений и решений и т. д. Основой таких преобразований является дополнительная информация об изучаемом процессе.

Трансформируем задачу, опираясь на знание характера функций $K(H)$ и $I_0(H)$ и на возможность находить в эксперименте не только расход, но и его производные по времени. Заметим, прежде всего, что из динамического уравнения Сен-Венана с учетом уравнения неразрывности величина $I_0(H)$ принципиально может быть определена без информации о $K(H)$ (в отличие от значения $K(H)$, которое не вычислить без знания $I_0(H)$). Таким образом, $I_0(H)$ «автоматически» получается при решении задачи идентификации вектора $\vec{a}$ (практически $K(H)$).

Теперь «вспомним», что, хотя формально $\vec{a} = \vec{a}(t)$, физический смысл при принятой идеализации имеет только зависимость $\vec{a}(H)$ (или $K(H)$). Поэтому будем искать $K(H)$ в классе полиномов от H некоторой степени $N < \infty$:

$$K(H) = \sum_{i=0}^N a_{i+1} H^i.$$

В этом случае идентифицировать надо числа a_i (коэффициенты полинома). Тогда V принадлежит конечномерному точечному пространству E , а решение всегда существует и устойчиво. Дело свелось к нахождению $\vec{a}_i^*$, в таких, что

$$\inf_{a_i \in V} L(a_i) = L(a_i^*),$$

где L — неотрицательная функция параметров a_i вида

$$L(a_i) = \|\dot{Q}_0(t) - f(Q, I_0, a_i)\|_{L_2[0, T]}.$$

Однако единственность решения для не строго выпуклой функции $L(a_i)$ не гарантируется.

В связи с последним обстоятельством следует заметить, что, ограничиваясь системой алгебраических уравнений, получающихся непосредственно из условия минимума $L(a_i)$, т. е., решая задачу на безусловный экстремум, мы не используем всей имеющейся информации. Процесс идентификации начинается с какого-либо установившегося режима (Q_0, H_0, I_0, K_0) , параметры которого связаны формулой Шези, т. е. в любой ситуации у нас имеется одна искомая точка однозначной зависимости $Q=f(H)$ или

$$K_0 = Q_0 / \sqrt{I_0} = \sum_{i=0}^N a_{i+1} H_0^{(i)}.$$

Кроме этого, волна неустановившегося режима, по измерениям гидравлических параметров которого восстанавливается связь $Q=f(H)$, может быть в зависимости от начального состояния потока разной формы. Если имеется возможность стабилизировать режим движения еще при $Q_{\max}$ и $Q_{\min}$, то добавляется еще одно или два условия, аналогичные выше приведенному. В этом случае на искомой однозначной зависимости $Q=f(H)$ мы имели бы несколько точек стабилизированного режима, и надежность всей кривой, естественно бы, возросла.

Таким образом, имеем задачу на условный экстремум, в которой на N искомых коэффициентов наложено $m < N$ дополнительных условий (уравнений связи) $F_m(a_i) = 0$. Ее решение сводится к исследованию на экстремум функции Лагранжа

$$\Phi(a_i) = L(a_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j F_j(a_i),$$

где λ_j — постоянные множители. Решение системы алгебраических уравнений, получающихся из необходимых условий минимума, дается формулой Крамера.

Привлечение дополнительной информации в виде условий $F_m(a_i) = 0$ надо рассматривать как продолжение регуляризации, хотя из-за неизбежных и трудно оцениваемых измерительных и вычислительных погрешностей при определении $\Phi(a_i)$ остается определенный произвол. В этом же ключе следует рассматривать и вопрос о выборе степени полинома N . Чем он меньше, тем с математической точки зрения лучше.

Запишем систему алгебраических уравнений для случая $N=3$ при наличии ограничений $F_m(a_i) = 0$. Учитывая погрешности измерений и несовершенство математической модели, уравнение (2.5) с учетом (2.1) получим в виде

$$\Phi_1 = Q^2 - K^2(H) \psi(H, t) \neq 0,$$

где $\psi(H, t) = I - \varphi(t)$ (здесь $\varphi(t) = (\partial Q / \partial t) / gF - (\partial F / \partial t) 2\alpha Q / gF^2$ — сумма инерционных членов).

Квадрат пропускной способности аппроксимируем следующим образом:

$$K^2 = a_1 H^2 + a_2 H + a_3.$$

Считаем, что известны $K_{\min}^2 = Q_{\min}^2 / I_{\min}$ и $H_{\min}$. Будем искать коэффициенты a_1, a_2, a_3 из условия минимума функции $\Phi(a_i)$, в которой

$$L(a_i) = \int_0^T \Phi_1^2 dt,$$

$$F(a_i) = a_1 H_{\min}^2 + a_2 H_{\min} + a_3 - K_{\min}^2. \quad (2.6)$$

Из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \int_0^T \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_i} dt + \lambda_T \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0,$$

имеем систему уравнений относительно коэффициентов:

$$\begin{aligned} \int_0^T -Q^2 \psi H^2 dt + a_1 \int_0^T H^4 \psi^2 dt + a_2 \int_0^T \psi^2 H^3 dt + a_3 \int_0^T \times \\ \times \psi^2 H^2 dt + \lambda_T H_{\min}^2 = 0, \\ \int_0^T -Q^2 \psi H dt + a_1 \int_0^T \psi^2 H^3 dt + a_2 \int_0^T \psi^2 H^2 dt + a_3 \int_0^T \times \\ \times \psi^2 H dt + \lambda_T H_{\min} = 0, \\ \int_0^T -Q^2 \psi dt + a_1 \int_0^T H^2 \psi^2 dt + a_2 \int_0^T H \psi^2 dt + a_3 \int_0^T \times \\ \times \psi^2 dt + \lambda_T = 0. \end{aligned}$$

Обозначив интегралы через α_{ik} , $\lambda_T = a_4$ и свободные члены — b_i , с учетом (2.6), получим систему:

$$\alpha_{ik} a_k = b_i \quad (i = \overline{1, 4}; k = \overline{1, 4}),$$

решение которой дается формулой

$$a_k = A_{ik} b_i / \det [\alpha_{ik}],$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента α_{ik} в определителе $\det [\alpha_{ik}]$. При этом возможны два случая:

1) $\psi = \psi(H)$, т. е. путем выполнения условия $T > h/U(\lambda/2)^{0.5}$ оказываемся в рамках квазиустановившегося режима по гидравлическим сопротивлениям, и искомая зависимость $Q = f(H)$ находится по выражению

$$Q = (a_1 \psi H^2 + a_2 \psi H + a_3 \psi)^{0.5};$$

2) если $\psi = \psi(H, t)$, то точный вид формулы для гидравлических сопротивлений не известен, и задача при современном уровне гидравлической теории в такой детерминированной постановке «точно» решена быть не может.

Эффективность методов идентификации очевидна, ибо объем воды, затрачиваемый на проведение градуировки по ряду стационарных режимов (обычно не менее 10 точек), определяемый выражением

$$\sum_{i=1}^n Q_i \Delta t_i \approx Q_{\text{ср}} \Delta t,$$

где $\Delta t \sim T$ (время стабилизации), в n раз больше, чем по одной волне неустановившегося режима.

3. ГИДРОМЕТРИЧЕСКИЙ УЧЕТ РЕЧНОГО СТОКА

3.1. Гидравлические и статистические способы оценки расхода воды в гидросторах

Основным способом подсчета стока воды в гидрометрии является использование зависимостей $Q = f(H)$ (рис. 3.1). Аналитически она может быть представлена в виде

$$Q = \sum_{i=0}^k a_{i+1} H^{(i)} \pm \varphi(z) \pm q,$$

где $\varphi(z)$ — некая функция, обязанная своим происхождением действию на режим потока фактора z (например, переменного подпора или деформации русла); q — отклонения точек от кривой за счет погрешностей измерений.

Задача заключается в определении, является ли связь $Q = f(H)$ однозначной или нет. Если по критерию, который рассмотрим ниже, она признается однозначной, то подсчет стока ведется по кривой. В случае, если отклонения точек связаны с действием физических факторов, то используются специальные методы расчета, например метод Стаута (хронологических поправок).

Критерий неоднозначности получают следующим образом. Отклонения точек от кривой $Q = f(H)$ характеризуются в целом, т. е. по набору всех измерений, относительной среднеквадратической величиной

$$\tilde{\sigma}_q = \sqrt{\frac{1}{N-k} \sum_1^N \left(\frac{Q_i - Q_{\text{кр}}}{Q_{\text{кр}}} \right)^2},$$

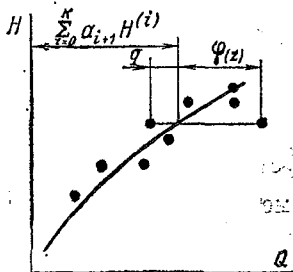


Рис. 3.1. Зависимость $Q = f(H)$.

где N — количество измеренных расходов Q_i ; k — число параметров (коэффициентов a_i) аппроксимирующей кривой; $Q_{кр}$ — значение расхода, снятое с кривой и соответствующее уровню, при котором измерено Q_i .

Дисперсия $\tilde{\sigma}_q^2$ складывается из дисперсии погрешностей измерения $\tilde{\sigma}_Q^2$ и дисперсии за счет действия физических (гидравлических) факторов

$$\tilde{\sigma}_q^2 = \tilde{\sigma}_Q^2 + \tilde{\sigma}_r^2.$$

Значение погрешности $\tilde{\sigma}_Q^2$ зависит от способа измерения расхода воды, и определение ее производится по известным формулам. Зная $\tilde{\sigma}_Q^2$, можно получить оценку

$$\tilde{\sigma}_r = \sqrt{\tilde{\sigma}_q^2 - \tilde{\sigma}_Q^2}.$$

Из данного соотношения вытекает критерий однозначности связи $Q(H)$. Для этого надо, чтобы дисперсия $\tilde{\sigma}_r^2$ была на порядок меньше дисперсии $\tilde{\sigma}_Q^2$, т. е. $\tilde{\sigma}_Q > \sqrt{10} \tilde{\sigma}_r$. При выполнении неравенства подсчет стока ведется по кривой $Q=f(H)$. Если получится, что $\tilde{\sigma}_Q < \sqrt{10} \tilde{\sigma}_r$, то кривая признается неоднозначной, и следует применять другие расчетные способы.

Интервал неопределенности, связанный с погрешностями измерений, можно приближенно выделить следующим образом. Пусть относительное среднеквадратическое значение погрешности измерения расхода $\tilde{\sigma}_Q$, определенное по специальным формулам, равно 0,05. Из метрологии известно, что между максимальной погрешностью в ряду из 20—30 измерений $\Delta Q_{\max}$ и среднеквадратической погрешностью существует связь

$$\pm \Delta Q_{\max} = k \sigma_Q,$$

где k — так называемый энтропийный коэффициент, значение которого меняется примерно в диапазоне 1,7—2,1 в зависимости от закона распределения погрешностей измерения. Для нормального закона, который используется чаще всего, $k \approx 2,07$. Поэтому можем написать

$$\pm \Delta Q_{\max} \approx 2,07 \tilde{\sigma}_Q = 2,07 \cdot 0,05 \approx 0,1.$$

Ширина интервала неопределенности определяется по формуле

$$\pm \Delta Q_{\max} \approx 0,1 Q_H$$

где Q_H — значение расхода, снятое с кривой $Q=f(H)$ при данном значении уровня воды (рис. 3.2).

Если связь $Q=f(H)$ по критерию оказывается неоднозначной, то встает вопрос об учете стока за тот период, когда действуют физические факторы, вызывающие неоднозначность. Здесь имеются две возможности: применение либо гидравлических, либо статистических (корреляционных) способов расчета.

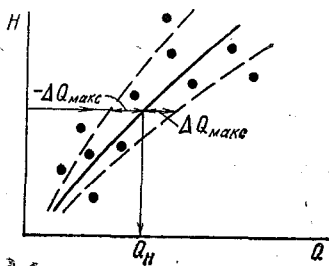


Рис. 3.2. Выделение интервала неопределенности.

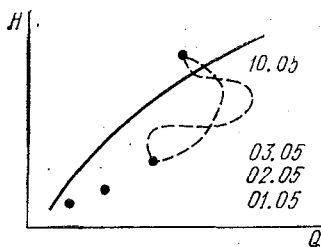


Рис. 3.3. Пример, поясняющий необходимость применения гидравлических способов подсчета стока.

Пусть, например, имеем ситуацию, изображенную на рис. 3.3. Расход воды с 3 по 10 мая не измерялся, но для подсчета стока надо знать ежедневные расходы воды. При этом производились ежедневные измерения уровня воды и уклона водной поверхности. Ясно, что отклонения точек в данном примере связаны с неустановившимся движением, и задача заключается в том, чтобы по доступным ежедневным наблюдениям за H и I определить расход воды за каждый день в период прохождения паводочной волны. Непосредственная экстраполяция между точками 3.05 и 10.05 не дает однозначного ответа о виде петли. Поэтому необходимо воспользоваться уравнением петли (2.1), решение которого

$$Q=f(f_1, f_2, f_3, t, Q_0)$$

(здесь f_1, f_2, f_3 являются $f(H, I)$, Q_0 — начальное условие, т.е. значение расхода на 03.05), даст нам гидрограф стока на интересующем нас интервале времени.

Применение подобного детерминированного уравнения в чистом виде, однако, ограничивается только неустановившимся движением и переменным подпором, когда имеется обоснованная гидравлическая основа в виде системы Сен-Венана. Во многих случаях (деформация русла, зарастание, ледовые явления и др.) применимость этих уравнений ставится под сомнение.

Действительно, например в случае деформации дна, имеем, что (z — отметка дна)

$$i = -\frac{\partial z}{\partial x} = f(t), \quad K = f(H, z(t)).$$

В этих случаях практическая гидрометрия использует так называемые корреляционно-статистические методы, как и обычно в гидрологии, когда отсутствуют детерминированные математические модели процесса. Суть их разберем на примере подсчета стока при ледовых явлениях (рис. 3.4).

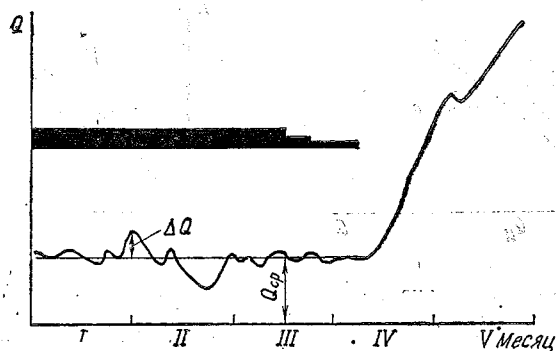


Рис. 3.4. К подсчету стока при ледовых явлениях.

Корреляционный метод позволяет установить интервал между прямыми измерениями расхода, чтобы надежно проводить интерполяцию. Делается это следующим образом.

1. Проводят предварительные учащенные ежедневные измерения расхода воды и получают гидрограф $Q=f(t)$ за период ледовых образований.

2. Определяют постоянную составляющую (средний расход) $Q_{ср}$.

3. Отклонения расхода от среднего значения ΔQ рассматривают как стационарный случайный процесс, который характеризуется:

а) нулевым математическим ожиданием $m=0$;

б) дисперсией $\sigma_{\Delta Q}^2$;

в) автокорреляционной функцией

$$r_{\Delta Q}(\tau) = \frac{\Delta Q(t) \Delta Q(t+\tau)}{\sigma_{\Delta Q}^2}.$$

Если оказывается, что дисперсия очень мала, т. е. вариации расхода незначительны, то достаточно одного измерения расхода за весь период (при условии, что $dm/dt=0$). Если дисперсия велика, то строим автокорреляционную функцию, которую во многих случаях можно аппроксимировать экспонентой

$$r(\tau) = e^{-\alpha\tau}.$$

Пользуясь этой кривой, выбираем дискретность измерений расхода Δt из условия хорошей связности соседних измеренных значений расхода (т. е. при определенном нормируемом значении коэффициента корреляции). В этом случае можно надежно проводить интерполяцию и тем самым восстанавливать истинный ход гидрографа. Если интервал между измерениями $[t_0, t_1] < \Delta t$, то истинный ход функции $Q(t)$ мало отличается от восстановленной кривой. Если же $[t_0, t_1] > \Delta t$, то, соединяя непосредственно измеренные расходы, можем не уловить реальный ход гидрографа.

Оба эти подхода «гидравлический» и «корреляционно-статистический» естественным образом объединяются при едином стохастическом описании процесса с помощью уравнения типа

$$\dot{Q} = [-C(t) + V(t)]\varphi(Q) + X(t),$$

где $V(t)$ — параметрический шум, который порождается такими факторами как зарастание, деформация и др. При этом случайный процесс $X(t)$ может коррелироваться с параметрическим шумом, что приводит к ряду специфических эффектов (например, появление систематических погрешностей). Уравнение для плотности вероятности (ФПК) было выписано в п. 2.1.

При таком подходе одновременно улавливается как динамика процесса, так и случайные вариации. Следует заметить, что пока нет опыта применения уравнения ФПК для решения чисто гидрометрических задач. На этом пути открывается широкое поле деятельности.

В гидрометрическом учете стока, однако, интересуются не только изменением расхода в створах, но и по длине потока — так называемыми русловыми водными балансами, к рассмотрению которых и переходим.

3.2. Гидрометрический учет стока и русловые водные балансы

В гидрологии широко применяется так называемый балансовый метод, позволяющий определить расчетным путем неизмеряемые непосредственно составляющие водного баланса. Например, испарение Z в некоторых случаях можно найти из соотношения

$$Z = X - Q,$$

где X — осадки.

Аналогичный метод можно применить для речной системы или отдельных участков рек (рис. 3.5). Уравнение руслового баланса главной реки для любого интервала времени от верхнего до нижнего створа можно записать в виде

$$Q_0 = Q_{\text{в}} - Q_{\text{н}} - \sum_{i=1}^N Q_i,$$

где $\sum_{i=1}^N Q_i$ — отъемы и сбросы воды на рассматриваемом участке; $Q_{\text{в}}$, $Q_{\text{н}}$ — соответственно расходы в верхнем и нижнем створах;

Q_0 — остаточный член, появляющийся либо за счет систематических погрешностей измерения отдельных составляющих руслового водного баланса (РВБ), либо за счет не учтенных, но значительных его составляющих.

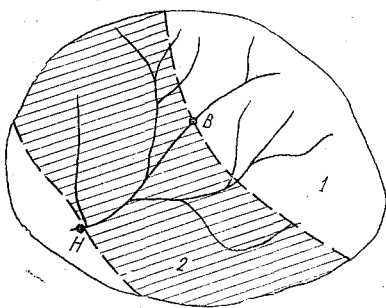


Рис. 3.5 К иллюстрации балансового метода:

1 — зона формирования речного стока; 2 — зона использования стока (В, Н — верхний и нижний гидрометрические створы, соответственно).

Если учтены все составляющие, и их измерение (расчет) производится точно, то $Q_0 \rightarrow 0$. Однако даже если в начале эксплуатации гидрологической системы остаточный член был равен нулю, то после определенного времени он может появиться по следующим причинам: 1) антропогенные воздействия; 2) естественные факторы; 3) допущение погрешностей в гидрометрическом учете стока.

Примером первой причины может служить появление нового промышленного предприятия на участке реки, либо нарушение технологического режима на уже существующем предприятии. Например, завод вместо предусмотренной проектом оборотной системы водоснабжения осуществляет сброс воды после предварительной очистки в реку, что, естественно, ведет к увеличенному по сравнению с предусмотренной нормой водо-

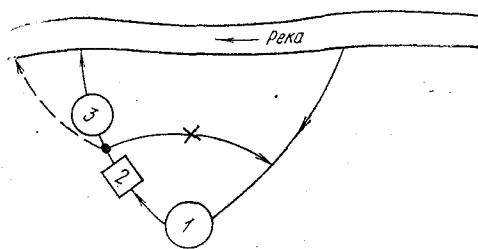


Рис. 3.6. Система водоснабжения:

1 — завод; 2, 3 — предварительная и окончательная очистка, соответственно.

забору (рис. 3.6). Возможно также, что из-за нарушения технологии производства завод расходует на единицу продукции воды больше, чем предусмотрено отраслевыми нормами.

В качестве примера естественного фактора может служить образование карстовых пещер, осуществляющих дополнительное регулирование речного стока.

Примером появления погрешностей в гидрометрическом учете стока может служить дрейф (в частности, из-за деформаций) градуировочной кривой $Q=f(H)$, по которой ведется определение расходов в верхнем или нижнем створах (рис. 3.7).

Целью составления РВБ и является выявление остаточного члена Q_0 с целью принятия мер для его устранения, что позволяет решать следующие важнейшие задачи:

1) изучение условий формирования речного стока и количественная оценка его отдельных генетических составляющих;

2) определение водных ресурсов и их изменений по длине реки во времени под влиянием естественных и антропогенных факторов;

3) изучение соотношений между отдельными составляющими РВБ в целях изменения их в полезном для человека направлении;

4) оценка взаимодействия речных и подземных вод;

5) увязка стока по длине рек и оценка точности гидрометрических наблюдений на реках, каналах и т. д.

Остановимся вкратце на способах определения составляющих РВБ, для чего запишем уравнение более подробно

$$Q_0 = Q_v - Q_{н.р} \pm Q_{р.р} \pm Q_{б.р} - Q_{вз} - Q_{сб.р} + Q_{б.пр} - Q_{исп} + Q_{ос},$$

где $Q_{р.р}$ — расход руслового регулирования, принимаемый со знаком минус при накоплении воды и со знаком плюс при ее отдаче; $Q_{б.р}$ — расход берегового регулирования; $Q_{вз}$ — расход водозабора; $Q_{сб}$ — расход сброса; $Q_{б.пр}$ — расход боковой приточности; $Q_{исп}$ — расход за счет испарения; $Q_{ос}$ — расход за счет осадков.

Расходы воды в верхнем и нижнем створах определяются обычными гидрометрическими методами. Расходы водозабора и сброса находят либо гидрометрическими способами, либо по выработанной продукции и существующим нормам расходования воды.

Значение $Q_{ос}$ определяют по данным метеостанций

$$Q_{ос} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i f_i \cdot F_{в, макс}}{F 86,4 T},$$

где X_i — осадки по данным наблюдений отдельной станции, мм; f_i — площадь, тяготеющая к этой станции; F — общая площадь

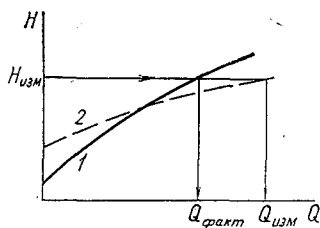


Рис. 3.7. Градуировочная кривая для подсчета стока в верхнем (нижнем) гидрометрическом створе:

1 — начальное положение кривой; 2 — положение кривой после некоторого времени эксплуатации гидроствора ($Q_{факт}$, $Q_{изм}$ — фактическое и измеренное значения расхода, соответственно).

поймы и русла в пределах расчетного участка; T — продолжительность расчетного периода, сутки; $F_{в, \max}$ — максимальная площадь затопления на участке реки, км².

Для подсчета $Q_{\text{исп}}$ используют формулу

$$Q_{\text{исп}} = \frac{\sum_{i=1}^3 E_{в, i} F_{0, i} + \sum_{i=1}^3 E_{п, i} F_{п, i}}{86,4 T},$$

где $E_{в, i}$ и $E_{п, i}$ — соответственно испарение с открытой водной поверхности и суммарное испарение с участков русла и поймы, занятых полупогруженной растительностью за отдельные декады расчетного месяца, мм; $F_{0, i}$ и $F_{п, i}$ — средние площади указанных испаряющих поверхностей за отдельные декады, км² ($E_{в, i}$, $E_{п, i}$ — определяют по эмпирическим формулам).

Значение $Q_{б. пр}$ находят по формуле:

$$Q_{б. пр} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n,$$

где Q_i — расход i -го притока ($i=1, 2, \dots, n$). Если отдельных измерений нет, то используется зависимость

$$Q_{б. пр} = \frac{1}{n} \left(\frac{Q_1}{F_1} + \frac{Q_2}{F_2} + \dots + \frac{Q_n}{F_n} \right) F,$$

где $Q_1, \dots, Q_n$ — средние расходы воды рек-аналогов за расчетный интервал времени; $F_1, \dots, F_n$ — площади водосборов этих рек до расчетных гидрометрических створов; n — число рек-аналогов; F — суммарная площадь водосборов неизученных боковых притоков на рассматриваемом участке реки. Если измерения вообще не проводились, то используют карты изолиний стока.

Изменение величины $Q_{р. р}$ связано с накоплением воды в русле и на пойме, а также в водохранилищах при подъеме уровня и с отдачей ее при спаде. С удлинением расчетного периода до года, когда цикл «накопление — опорожнение» русловой емкости обычно завершается, значение величины руслового регулирования приближается к нулю.

Для подсчета $Q_{р. р}$ служит формула:

$$Q_{р. р} = \frac{\Delta W}{86400 T},$$

где $\Delta W = W_k - W_n$ — изменение объема (м³) на участке реки от начального до конечного значения за расчетный интервал времени T (сутки). При этом

$$W = \int_{H_{ср, 0}}^{H_{ср}} F_{в}(H_{ср}) dH_{ср},$$

где $F_{в}(H_{ср})$ — зависимость площади зеркала воды на участке от среднего уровня; $H_{ср, 0}$ — уровень, соответствующий пересыханию русла ($F_{в}=0$).

Для коротких участков расчетная формула упрощается

$$Q_{p.p} = \frac{0,5(\Delta H_{\text{в}} - \Delta H_{\text{н}})}{86400 T} F_{\text{в}},$$

где $\Delta H_{\text{в}}$ и $\Delta H_{\text{н}}$ — соответственно изменения уровня воды в верхнем и нижнем створах участка за расчетный интервал времени, м; $F_{\text{в}}$ — площадь водной поверхности на участке, соответствующая осредненному во времени и по длине участка уровню $H_{\text{ср}}$. Для определения $F_{\text{в}}$ обычно по картам или аэрофотоснимкам строятся графические зависимости.

Определение расхода берегового регулирования довольно сложно. В зависимости от уровня воды в реке он может входить в уравнение водного баланса как с плюсом, так и с минусом. Для расчета используются эмпирические формулы вида

$$Q_{б.p} \sim k \Delta H,$$

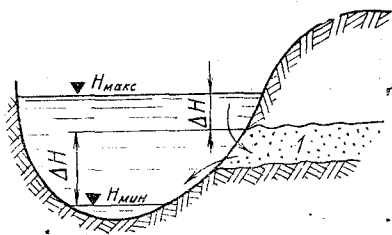


Рис. 3.8. Береговое регулирование (1 — водоносный слой).

где ΔH — перепад уровней (рис. 3.8); k — коэффициент.

Уравнение РВБ может быть решено относительно любого члена с указанием его оценки. Определим, например, значимость остаточного члена. Его погрешность находят по формуле

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (\delta_i Q_i)^2},$$

где δ_i — относительная средняя квадратическая погрешность определения расхода Q_i . Если окажется, что $|Q_0| \geq 2 \sigma_0$, то Q_0 — значим, т. е. за ним стоит генетическая причина физического характера (например, не учтенное изъятие стока каким-либо предприятием), и надо принимать меры, направленные на ее ликвидацию.

В общем случае балансовые соотношения должны получаться из дифференциальных уравнений движения. В частности, если речь идет о неравномерном режиме, то справедливо выражение

$$I = \frac{Q^2}{K^2} + \frac{2Q}{gF^2} \frac{dQ}{dx} + \frac{qQ}{F^2 g},$$

где q — боковая приточность на единицу длины. После простых преобразований, считая, что $I_0 \approx Q^2/C^2 R F^2$, получим

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{(I - I_0) g F^2}{2} \frac{1}{Q} - \frac{q}{2}$$

(здесь предполагается, что I_0, I и F — известны из непосредственных измерений). Стохастическим аналогом этого уравнения будет

$$\frac{dQ}{dx} = \left[\frac{(I - I_0)gF^2}{2} + V(x) \right] \varphi(Q) - \frac{q}{2},$$

где $V(x)$ — параметрический шум, наличие которого связано с погрешностями измерения I, I_0, F , а также с тем обстоятельством, что коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению отличен от единицы и меняется по координате x . Боковая приточность может быть задана в виде детерминированной известной функции x , либо содержать случайную составляющую, в том числе и коррелированную с $V(x)$. Таким образом опять приходим к уравнению ФПК, но для плотности вероятности $p(Q, x)$

$$\frac{\partial p(Q, x)}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial Q} A(Q, x) p(Q, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(Q, x) p(Q, x)}{\partial Q^2}.$$

Естественно напрашивается идея о получении совместного уравнения для плотности вероятности $p(Q, x, t)$, решение которого даст вероятностное описание русловых балансов для любой протяженности участка русла и любого интервала времени. Более того, подобное уравнение дало бы возможность стохастического оценивания состояния гидрологических объектов для решения не только режимных задач, но и оперативных, связанных со стохастическим управлением водохозяйственными системами. Об этом и пойдет речь в следующем параграфе.

3.3. Стохастическое оценивание состояния гидрологических систем

Известно, что речную систему можно схематизировать направленным графом, в узлах которого выполняются определенные балансовые соотношения (например, $\sum_{i=1}^N Q_i = 0$), а движение среды

(воды или твердой фазы) на дугах описывается уравнениями гидравлики. Оперативно управлять подобной речной системой можно, если на любой момент времени знать информацию об изменении функции $W(x_i, t)$ (здесь x_i — координатная ось i -й дуги. Уравнение для определения $W(x_i, t)$ получается из системы Сен-Венана. Для простоты будем считать режим движения квазиравномерным и не учитывать боковую приточность, тогда

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{\frac{1}{K^2 I}} \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Это соотношение эквивалентно аналогичному уравнению, получающемуся из измерительной формулы метода «скорость — площадь» $Q = UF$:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{U} \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Различие между ними заключается в том, что значения величин K и I могут быть не только измерены, но и заданы априори расчетным путем, а скорость должна измеряться непосредственно в каждой точке (x, t) . Для обоих случаев должны быть заданы начальные распределения $W(x, t_0)$ и условия на границах.

Учитывая стохастический характер поля скорости, а также то, что уравнения содержат производные по пространственной переменной только первого порядка, можно ввести одноточечную плотность вероятности $p(W, t, x)$:

$$p_{t,x}(W) = \langle \delta(W(x, t) - W) \rangle$$

(здесь $\langle \quad \rangle$ — знак осреднения, δ — дельта-функция), параметрически зависящую от t и x , и получить стохастическое уравнение для изменения запаса воды в русловой сети бассейна

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial W^2} \langle U(x, t) \frac{\partial W}{\partial x} \delta(W(x, t) - W) \rangle.$$

Это уравнение не замкнуто относительно плотности вероятности $p_{t,x}$, так как содержит корреляцию в правой части, которая через решение зависит от случайного процесса $U(x, t)$. Известны способы «расщепления» указанной корреляции, применяя которые можно получить замкнутое соотношение, имеющее в приближении диффузионного случайного процесса вид

$$\frac{\partial p_{t,x}}{\partial t} = \int dx' \Phi(x, x') \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') \frac{\partial}{\partial x} p_{t,x}(W),$$

где $\Phi(x, x') = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B(0, \tau)$; B — корреляционная функция $U(x, t)$. Особенно простым уравнение будет в случае изотропии $U(x, t)$ (это может представлять интерес как модельный случай):

$$\frac{\partial p_{t,x}(W)}{\partial t} = \Phi(0) \frac{\partial^2 p_{t,x}(W)}{\partial x^2}.$$

Решение указанных уравнений дает вероятностную картину изменений запасов воды. Для этого, однако, необходима оценка общего количества узлов наблюдений за величиной $U(x, t)$ (или узлов задания K и I), т. е. для решения уравнения нужна гидрометрическая сетка (i, k) , общее число узлов которой может быть оценено сверху из условий устойчивости принятой вычислительной схемы. В случае явной схемы дискретности по времени τ и координате h связаны условием Куранта

$$\tau \leq h^2 / 2 \Phi.$$

Следовательно, при подобном (стохастическом) подходе к оцениванию состояния гидрологических систем, задача оптимизации количества пунктов и сроков наблюдений и выбора измерительных

математических моделей сливаются в единую задачу корректного решения уравнения для плотности вероятности. Исследовать математически этот вопрос не просто, но можно на элементарном примере показать, что в некоторых ситуациях устойчивого распределения вероятности может не быть. В этом случае возникает новый вопрос: что собственно надо оценивать?

Наиболее распространенным путем исследования устойчивости является обобщение первого метода Ляпунова, в соответствии с которым в фазовом пространстве выбирается положительная функция $v(t, Q)$, обращающаяся в нуль в начале координат, и такая, что ее полная производная по времени принимает отрицательные значения. С физической точки зрения это соответствует рассеиванию энергии, аналогом которой и является функция Ляпунова

$$0 \geq L v(t, Q_i) = \frac{\partial v(t, Q)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(t, Q)}{\partial Q_i} A_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v(t, Q)}{\partial Q_i \partial Q_j} B_{ij}, \quad (3.1)$$

где A_i, B_{ij} — соответственно коэффициенты сноса и диффузии.

Рассмотрим речной бассейн, моделируемый следующим линейным уравнением:

$$\frac{dQ}{dt} + (C + V(t)) Q = X(t) - Z(t) = X_1(t), \quad (3.2)$$

где Q — расход в замыкающем створе; C — параметр водосбора (грубо говоря — это аналог величины, обратной коэффициенту стока); $V(t)$ — параметрический шум (вызывается изменением коэффициента стока под действием различных факторов: увлажненности, распаханности или, например, случайной гидравлической завязки речных и подземных вод); $X(t)$ — «осадки»; $Z(t)$ — «испарение».

Случайные функции $V(t)$ и $X_1(t)$ будем считать белыми шумами с математическими ожиданиями m_V и m_{X_1} и интенсивностями G_{X_1} , G_V , G_{X_1V} . Уравнение ФПК имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ \left[\left(C + m_V - \frac{1}{2} G_V \right) Q + \frac{1}{2} G_{X_1V} - m_V \right] p \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \left\{ \left[G_V Q^2 - 2 G_{X_1V} Q + G_V \right] p \right\}.$$

В установившемся режиме имеет место выражение

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} p.$$

где $(a, b_0, b_1, b_2) = f(G_{X,V}, m_V, G_V, G_{X_1}, m_{X_1}, C)$, и в качестве его решений имеем семейство распределений Пирсона, которое разбивается на несколько групп в соответствии с корнями уравнения

$$b_2 Q^2 + b_1 Q + b_0 = 0.$$

В зависимости от соотношения параметров получаются разные частные случаи распределений, из анализа которых следует, что наиболее важным стохастическим эффектом является детектирование (появление постоянной составляющей в выходном процессе при нулевом математическом ожидании входного процесса). В отличие от детерминированных систем, где подобный эффект создается за счет гармонического изменения с одинаковой частотой входного сигнала и параметров, в данном случае его появление обязано корреляции между параметрическими и аддитивными шумами. Возможно именно этим обстоятельством объясняется появление детерминированных составляющих в гидрологических рядах.

Другой эффект — возникновение неустойчивости. Так как последнее свойство зависит от внутренних особенностей исследуемого объекта (в данном случае — характеристик речного бассейна), то можно принять $X_1(t) = 0$. Чтобы исследовать на устойчивость уравнение (3.2) при $X_1(t) = 0$, надо выбрать функцию Ляпунова. Возьмем

$$v(Q) = |Q|^{-\frac{2C}{G_V}},$$

В соответствии с формулой (3.1) с учетом выражений для коэффициентов сноса и диффузии имеем

$$Lv(Q) = |Q|^{-\frac{2C}{G_V}} \left[-\frac{2C}{G_V} \left(C + \frac{1}{2} G_V \right) + C \left(\frac{2C}{G_V} + 1 \right) \right].$$

Из этого равенства видно, что $Lv(Q) = 0$. Для положительной определенности $v(Q)$, которая обеспечивает устойчивость (3.2), надо, чтобы $C < 0$. При $G_V > 2C$ возникает неустойчивость, и стационарного распределения вероятности расхода речного бассейна не будет. Последнее обстоятельство, возможно, объясняет отсутствие общепринятых в некоторых случаях кривых распределений в гидрологии, особенно для малых водосборов в районах, в которых в силу ряда физико-географических условий (карст, гидравлическое взаимодействие подземных вод с поверхностными и т. п.) возможны существенные колебания коэффициента стока и, следовательно, неустойчивость.

Еще одно интересное явление, связанное с неустойчивостью — так называемый переброс: системы могут быстро переходить из одного квазистационарного состояния в другое и обратно. Напри-

мер, существованием различных режимов движения при одинаковых внешних воздействиях можно объяснить резкие изменения климата Земли. Возможны различные уравнения, приводящие к явлению переброса. Усложним, например, модель водосборного бассейна (3.2). Известно, что в общем случае связь между входным воздействием на бассейн (у нас — это $X_1(t)$) и выходом (расходом воды в замыкающем створе) нелинейная. Пусть она описывается уравнением

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + (C + V)q + \beta_1 q^2 + \beta_2 q^3 = \bar{X}_1(t), \quad (3.3)$$

где $q = Q - Q_0$, $\bar{X}_1(t) = X_1(t) - X_0(t)$ — отклонения выходной и входной величин от соответствующих норм. При $\beta_1 = 0$, $V = 0$ оно совпадает с уравнением, рассмотренным в работе В. И. Кляцкина [5]. Пусть

$$\langle \bar{X}_1(t) \bar{X}_1(t') \rangle = 2D \delta(t - t')$$

(здесь D — коэффициент). Стационарное распределение вероятности, установление которого описывается уравнением Эйнштейна — Смолуховского

$$\frac{\partial p_t(q)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{(C + V)q^2}{2} + \frac{\beta q^4}{4} \right] p_t \right\} + \frac{D}{\alpha^2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial q^2},$$

имеет вид

$$p_\infty(q) = \text{const} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{D} \left(\frac{(C + V)q^2}{2} + \frac{\beta q^4}{4} \right) \right\}.$$

При $C + V > 0$ это одномодальное распределение с максимумом $q = 0$, что соответствует норме стока. Однако при $C + V < 0$ (а это возможно, как уже указывалось, при определенной гидрологической ситуации, в частности при сильных шумах V) имеется два максимума в точках

$$q = \pm ((C + V)/\beta)^{0.5}$$

и минимум в точке $q = 0$ (рис. 3.9). Время T переброса из одного состояния в другое зависит от интенсивности $\bar{X}_1(t)$ и определяется выражением

$$T = \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{1}{4} \mu \right),$$

где $\mu = \beta D / \alpha (C + V)^2 \ll 1$. Как видно из приведенных соотношений, при $C + V = 0$ $\langle q^2 \rangle \sim \sqrt{D}$, т. е. происходит резкое усиление флуктуаций расхода.

Возможно, рассмотренная ситуация в гидрологии довольно экзотическая. Любое двухмодальное распределение в настоящее время связывается с видом функции $X_1(t)$, т. е. с различным гене-

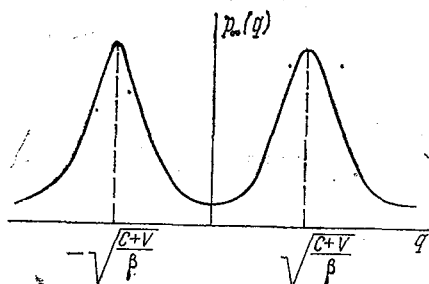


Рис. 3.9. Стационарное распределение плотности вероятности для $q(t)$.

тическим происхождением стока. Подобный переброс могут давать различные модели речных бассейнов, а не только уравнение (3.3), которое взято просто из-за того, что поведение его решения уже изучено и описано в математической литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков И. Е., Мальчиков С. В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
2. Карасев И. Ф. О принципах размещения и перспективах развития гидрологической сети. — Труды ГГИ, 1968, вып. 164, с. 3—36.
3. Карасев И. Ф. Речная гидрометрия и учет водных ресурсов. — Л.: Гидрометеиздат, 1980. — 312 с.
4. Картвелишвили Н. А. Стохастическая гидрология. — Л.: Гидрометеиздат, 1975. — 164 с.
5. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975. — 240 с.
6. Коваленко В. В. Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков. — Л.: Гидрометеиздат, 1984. — 160 с.
7. Коваленко В. В. Гидрологическая измерительная техника. — Л., изд. ЛПИ, 1984. — 70 с. (ЛГМИ).
8. Кучмент Л. С. Модели процессов формирования речного стока. — Л.: Гидрометеиздат, 1980. — 144 с.
9. Методические указания управлениям гидрометеослужбы № 90. Составление русловых водных балансов. — Л.: Гидрометеиздат, 1977. — 104 с.
10. Темников Ф. Е. и др. Теоретические основы информационной техники. — М.: Энергия, 1979. — 512 с.
11. Туричи А. М. и др. Электрические измерения неэлектрических величин. — Л.: Энергия, 1975. — 576 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение. Элементы функционального анализа, используемые в теории измерений	3
1. Оптимизация количества пунктов и сроков гидрологических наблюдений	9
1.1. Постановка задачи гидрологических измерений	9
1.2. Применение теории случайных процессов (полей) для оптимизации режимной гидрологической сети	15
1.3. Применение информационной теории погрешностей для оптимизации измерений	19
2. Математические модели речной гидрометрии и их параметризация	25
2.1. Детерминированные и стохастические измерительные модели гидрометрии	25
2.2. Корректность измерительно-расчетных моделей. Метод функций чувствительности	31
2.3. Параметризация измерительных моделей гидрометрии	37
3. Гидрометрический учет речного стока	45
3.1. Гидравлические и статистические способы оценки расхода воды в гидростворах	45
3.2. Гидрометрический учет стока и русловые водные балансы	49
3.3. Стохастическое оценивание состояния гидрологических систем	54
Литература	59

ВИКТОР ВАСИЛЬЕВИЧ КОВАЛЕНКО

**ГИДРОМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕЧНОГО СТОКА
С ЭЛЕМЕНТАМИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА**

Учебное пособие

Редактор **З. Б. Ваксенбург**

Корректор **Л. В. Ломакина**

Сдано в набор 28.11.85.	Подписано в печать 04.08.86.	М-15194.
Формат 60×90 ^{1/16} .	Бумага тип. № 2.	Лит. гарн. Печать высокая.
Печ. л. 3,81.	Уч.-изд. л. 4,4.	Тираж 1000 экз. Темплан 1986 г., поз. 270.
Зак. 101.		Цена 20 коп.

ЛПИ им. М. И. Калинина. 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.

Типография ВСОК ВМФ.